

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

OPTIMISATION STOCHASTIQUE ET APPLICATION  
FINANCIÈRE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

PANDRY WILSON SOB TCHUAKEM

OCTOBRE 2010

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

## REMERCIEMENTS

Je tiens premièrement à remercier mes parents car mon éducation est le fruit de leurs ardents efforts.

Je remercie également tous les professeurs et le personnel du Département de mathématique de l'UQAM qui m'ont transmis la connaissance et l'aide nécessaires à la réalisation de ce travail, en particulier François Watier et Sorana Froda.

Enfin, je remercie Patricia pour son soutien constant et son amour, sans toutefois oublier tous mes amis pour tous leurs encouragements.

## TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ . . . . .	v
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE I	
RAPPELS SUR LE CALCUL STOCHASTIQUE . . . . .	2
1.1 Processus stochastique . . . . .	2
1.1.1 Processus de Markov . . . . .	3
1.1.2 Temps d'arrêt. . . . .	3
1.1.3 Mouvement brownien . . . . .	3
1.2 L'intégrale stochastique (l'intégrale d'Itô). . . . .	4
1.2.1 Propriétés de l'intégrale stochastique. . . . .	4
1.2.2 Processus d'Itô . . . . .	5
1.2.3 Martingales . . . . .	6
1.2.4 Variation quadratique . . . . .	7
1.3 Équations différentielles stochastiques (EDS) . . . . .	7
1.3.1 Condition d'existence et d'unicité d'une solution forte . . . . .	8
1.3.2 Équations différentielles stochastiques rétrogrades . . . . .	9
CHAPITRE II	
FORMULATION DU PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL STOCHASTIQUE.	10
2.1 Quelques exemples de problèmes . . . . .	10
2.1.1 Exemple 1 : Réassurance et gestion des dividendes . . . . .	11
2.1.2 Exemple 2 : Investissement et consommation. . . . .	12
2.2 Formulation du problème du contrôle optimal stochastique . . . . .	14
2.2.1 Formulation (forte) . . . . .	14
2.2.2 Formulation (faible) . . . . .	16
CHAPITRE III	
PRINCIPE DU MAXIMUM ET PROGRAMMATION DYNAMIQUE. . . . .	17

3.1	Existence du contrôle optimal. . . . .	17
3.1.1	Quelques hypothèses : . . . . .	18
3.2	Le principe du maximum stochastique . . . . .	20
3.2.1	Cas sans contrainte sur la variable d'état . . . . .	20
3.2.2	Condition suffisante d'optimalité . . . . .	23
3.2.3	Cas avec contrainte sur la variable d'état. . . . .	23
3.3	Programmation dynamique . . . . .	25
3.3.1	Solutions de viscosité . . . . .	30
3.3.2	Théorème de vérification . . . . .	30
CHAPITRE IV		
APPLICATIONS :		
	STRATÉGIE MOYENNE-VARIANCE. . . . .	34
4.1	Formulation du problème. . . . .	34
4.2	Résolution par le principe du maximum stochastique . . . . .	37
4.2.1	Problème sans contrainte. . . . .	37
4.2.2	Problème avec contrainte. . . . .	41
4.3	Resolution par la programmation dynamique. . . . .	47
4.3.1	Problème sans contrainte. . . . .	47
4.3.2	Problème avec contrainte. . . . .	50
CONCLUSION . . . . .		62
BIBLIOGRAPHIE . . . . .		63

## RÉSUMÉ

Notre travail concerne l'optimisation stochastique en temps continu et son application en finance. Nous donnons d'abord une formulation mathématique du problème, pour ensuite examiner deux approches de résolution du problème de contrôle optimal. La première, le principe du maximum stochastique, dans laquelle intervient la notion d'équations stochastiques rétrogrades (EDSRs), nous offre une condition nécessaire d'optimalité. Nous explorons également le cas où la condition devient suffisante. La deuxième approche quant à elle, est la programmation dynamique. Elle propose un candidat potentiel pour la solution optimale à travers la résolution d'une équation aux dérivées partielles appelée équation d'Hamilton Jacobi Bellman (HJB). Grâce au théorème de vérification, on pourra "vérifier" que le candidat est en fait la solution optimale. Enfin, nous appliquons ces deux techniques en résolvant le problème de sélection du portefeuille Moyenne-Variance avec ou sans contrainte d'interdiction de vente à découvert.

**Mots clés :** contrôle optimal, principe du maximum, EDSR, programmation dynamique, HJB. Théorème de Vérification, moyenne-variance.

## INTRODUCTION

Les problèmes d'optimisation prennent leur essence en la volonté permanente chez l'Homme de trouver la solution optimale à ses difficultés. Que ce soit dans le monde de la finance, de l'industrie, ou encore de la santé, l'intérêt est souvent porté sur l'optimisation des systèmes qui évoluent dans le temps : on parle de *systèmes dynamiques*. Une réalité à laquelle on est très souvent confronté dans la pratique, est celle de l'incertitude. En effet, imaginons un industriel qui pour obtenir un rendement efficient, souhaite toujours ajuster sa production en fonction de la demande. À cause de la présence d'incertitudes sur le marché, la demande se traduit donc par un mouvement aléatoire que l'industriel ne peut malheureusement contrôler. Ainsi, la question qui se pose est celle de savoir quelle stratégie de production l'industriel doit-il entreprendre pour atteindre son objectif qui est de minimiser ses pertes. Un tel problème est un *problème de contrôle optimal stochastique*. Évidemment, la situation pourrait se complexifier si des contraintes telles la non rupture de stocks ou de la production s'imposent ! On dira dans ce cas que le problème est avec contrainte. Bien que la théorie du contrôle optimal remonte aux années 50, Bellman fût le premier à s'intéresser à l'aspect stochastique en 1958. Cependant, on n'y retrouvait pas le type d'équation différentielle d'Itô. Pour mieux comprendre et résoudre les problèmes de contrôle optimal tels celui de l'industriel ci-dessus, nous présentons notre travail en 4 chapitres. Le premier est un bref rappel sur le calcul stochastique. Le deuxième consiste essentiellement en la formulation mathématique du problème de contrôle optimal. Dans le troisième chapitre, nous étudions deux méthodes bien connues de résolution du problème de contrôle optimal stochastique : Le Principe du Maximum Stochastique et la Programmation Dynamique. Ces deux techniques sont appliquées au chapitre 4 à travers le problème de selection du portefeuille Moyenne-Variance avec ou sans contrainte de vente à découvert.

# CHAPITRE I

## RAPPELS SUR LE CALCUL STOCHASTIQUE

### 1.1 Processus stochastique

Dans cette section, nous discutons des processus stochastiques. Il s'agit de familles de variables aléatoires qui jouent un important rôle dans l'étude des phénomènes aléatoires. Nous passerons en revue quelques processus aux propriétés particulièrement intéressantes.

**Définition 1.1.1.** *Soit  $I$  un ensemble d'indices non vide. On appelle processus stochastique une famille de variables aléatoires  $\{X_t, t \in I\}$  indexée par  $I$ .*

**Remarques :**

- Si  $I \subseteq \mathbb{N}$ , on dit que le processus est à *temps discret*.
- Si  $I \subseteq \mathbb{R}$ , on dit que le processus est à *temps continu*. C'est à ce type de processus que nous nous intéressons dans le cadre de notre travail.
- Dans la suite, nous noterons variable aléatoire par v.a.

**Définition 1.1.2.** *Soit un espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{F})$ . On appelle filtration une collection  $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$  croissante de sous-tribus de  $\mathcal{F}$ . Donc,  $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$  si  $s \leq t$ .*

Le quadruplet  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$  sera appelé un *espace de probabilité filtré*.

**Définition 1.1.3.** *Un processus  $\{X_t, t \in I\}$  est dit adapté à une filtration  $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$  si  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.*



La filtration naturelle d'un processus  $\{X_t, t \in I\}$  est  $\{\mathcal{F}_t^X, t \in I\}$  telle que

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_i; 0 \leq i \leq t)$$

Un processus  $\{X_t\}$  est dit à trajectoires continues (ou simplement processus continu) si  $P(\{\omega \in \Omega; t \mapsto X_t(\omega) \text{ est continue}\}) = 1$

### 1.1.1 Processus de Markov

**Définition 1.1.4.** Un processus  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  est dit de Markov si pour tout  $t > s \geq 0$  et toute fonction borélienne et bornée  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$\mathbb{E}(f(X_t) | \mathcal{F}_s^X) = \mathbb{E}(f(X_t) | X_s) \text{ (presque sûrement),}$$

avec  $\mathcal{F}_s^X = \sigma(X_i, 0 \leq i \leq s)$ .

C'est un processus *sans mémoire* car la transition de  $s$  ent ne dépend que de  $X_s$ . Elle ne tient pas compte de  $X_u$  pour  $u < s$ .

### 1.1.2 Temps d'arrêt.

**Définition 1.1.5.** Un temps d'arrêt par rapport à une filtration  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  est une v.a.

$T : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$  telle que  $\{T \leq t\} = \{\omega \in \Omega | T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$ .

Pour tout temps d'arrêt  $T$ , on définit :

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} | A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0\}.$$

### 1.1.3 Mouvement brownien

**Définition 1.1.6.** Un mouvement brownien est un processus stochastique  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  à trajectoires continues dont les accroissements disjoints sont indépendants, et  $\forall s > 0$ ,  $(W_{t+s} - W_t) \sim \mathcal{N}(0, s)$ .

Si de plus,  $P(W_0 = 0) = 1$ , alors  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien standard.

**Remarques :**

- Un mouvement brownien est *géométrique* s'il est de la forme

$$X(t) = X(0) \exp(\mu t + \sigma W_t).$$

- On peut montrer (Yong et Zhou, 1999)[p. 30-32] que les trajectoires du mouvement brownien sont presque sûrement (p.s.) nulle part différentiables, c'est à dire que :

$$P(\{\omega \in \Omega \mid \lim_{h \rightarrow 0} \frac{W_{t+h}(\omega) - W_t(\omega)}{h} = \infty\}) = 1.$$

De plus, la fonction  $t \mapsto W_t(\omega)$  n'est p.s. pas à variation bornée.

## 1.2 L'intégrale stochastique (l'intégrale d'Itô).

Il s'agit d'une intégrale de la forme :

$$\int_0^T X(t) dW(t) \tag{1.1}$$

où  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  est mouvement brownien, et  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un processus stochastique répondant à certains critères d'intégrabilité. En ingénierie financière,  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  pourrait par exemple représenter l'évolution du prix d'un actif dans le temps et  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  la stratégie de transaction sur cet actif d'un investisseur. L'équation (1.1) est alors le gain réalisé à l'horizon  $T$ . La manipulation de cette forme d'intégrale est facilitée par l'utilisation de la formule d'Itô, faisant référence à son auteur, le mathématicien Kiyoshi Itô.

### 1.2.1 Propriétés de l'intégrale stochastique.

L'intégrale stochastique possède les propriétés suivantes :

1.  $\int_0^T (aH_1 + bH_2)(s) dW(s) = a \int_0^T H_1(s) dW(s) + b \int_0^T H_2(s) dW(s)$
2.  $\mathbb{E}(\int_0^T H(s) dW(s)) = 0$
3.  $\mathbb{E}[(\int_0^T H(s) dW(s))^2] = \mathbb{E}(\int_0^T H(s)^2 ds)$  (isométrie d'Itô)
4.  $\mathbb{E}(\int_0^T H_1(s) dW(s))(\int_0^T H_2(s) dW(s)) = \mathbb{E}(\int_0^T H_1(s) H_2(s) ds)$
5.  $\mathbb{E}(\int_0^t H(s) dW(s) | \mathcal{F}_u) = \int_0^u H(s) dW(s)$  (propriété martingale)

### 1.2.2 Processus d'Itô

Rappelons que  $\mathcal{S}^1$  désigne l'ensemble des processus intégrables,  $\mathcal{S}^2$ , l'ensemble des processus  $\{H_t\}_{t \geq 0}$  adaptés à la filtration  $\{\mathcal{F}_t\}$  tels que :  $\mathbb{E}(\int_0^T H^2(s)ds) < \infty$

**Définition 1.2.1.** *Un processus  $X$  est un processus d'Itô s'il existe  $X_0$ ,  $U \in \mathcal{S}^1$  et  $V \in \mathcal{S}^2$  tels que :*

$$X(t) = X_0 + \int_0^t U(s)ds + \int_0^t V(s)dW(s)$$

**Théorème 1.2.2. (Formule d'Itô)** *Soit  $f$  une fonction continûment différentiable deux fois et  $\{W_t\}$  un mouvement brownien standard. On pose*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(s, X(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, X(s)) dW(s)$$

Pour tout  $t$ , on a :

$$\begin{aligned} df(t, X(t)) &= \left[ f_t(t, X(t)) + b(t, X(t))f_x(t, X(t)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\sigma(t, X(t))^2 f_{xx}(t, X(t)) \right] dt + \sigma(t, X(t))f_x(t, X(t)) dW(t). \end{aligned}$$

où  $f_t, f_x$ , et  $f_{xx}$  sont les dérivées partielles.

**Exemple :** Prenons  $dX(t) = X(t)dW_t$ , et  $f(x) = \ln x$ .

On a donc :  $f_t(X(t)) = 0$ ,  $f_x(X(t)) = \frac{1}{X(t)}$  et  $f_{xx}(X(t)) = -\frac{1}{X(t)^2}$ .

La formule d'Itô s'applique :

$$\begin{aligned} d(\ln(X(t))) &= \left[ 0 + 0 + \frac{1}{2}X(t)^2 \left( -\frac{1}{X(t)^2} \right) \right] dt + X(t) \frac{1}{X(t)} dW(t) \\ &= -\frac{1}{2}dt + dW(t). \end{aligned}$$

En intégrant, on obtient

$$X(t) = X(0) \exp \left( -\frac{1}{2}t + W(t) \right).$$

On reconnaît là un mouvement brownien géométrique.

**Remarque :** La formule d'Itô s'énonce également dans le cas multidimensionnel, c-à-d,  $b(t)$ ,  $\sigma(t)$ ,  $W(t)$  sont des matrices :

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) &= f(0, X(0)) + \int_0^t \left\{ f_s(s, X(s)) + f_x(s, X(s)) \cdot b(s) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \text{tr}[\sigma(s)^\top f_{xx}(s, X(s)) \sigma(s)] \right\} ds \\ &\quad + \int_0^t f_x(s, X(s)) \cdot \sigma(s) dW_s \end{aligned}$$

### 1.2.3 Martingales

Les martingales représentent une classe particulière de processus stochastiques. Elles jouent un important rôle en ingénierie financière.

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$  un espace de probabilité filtré.

**Définition 1.2.3.** Un processus stochastique  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  adapté à la filtration  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  est une martingale si  $\forall s < t, \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ . On parlera de sous-martingale si  $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s$  et de sur-martingale si  $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s$ .

**Exemple :**

- Un mouvement brownien  $\{W_t\}$  est une martingale.
- Le processus  $\{W_t^2 - t\}$  est également une martingale.

**Théorème 1.2.4.** (Théorème de représentation des martingales)

Soient  $\{W_t\}$  un mouvement brownien sur un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ , et  $M_t$  une martingale  $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptée. Alors, il existe un processus adapté  $Z_s$  tel que :

$$M(t) = M(0) + \int_0^t Z(s) dW_s.$$

### 1.2.4 Variation quadratique

Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux martingales (par rapport à la même filtration) et  $\pi_n : 0 < t_1 < \dots < t_n = t$ , une partition de  $[0, t]$  telle que  $\max_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0$ , alors on pose :

$$\langle M_1, M_2 \rangle_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (M_1(t_i) - M_1(t_{i-1}))(M_2(t_i) - M_2(t_{i-1}))$$

$\langle M_1, M_2 \rangle_t$  s'appelle la covariation quadratique de  $M_1$  et  $M_2$ .

On définit ainsi la variation quadratique d'une martingale  $\{M_t\}$  par :

$$\langle M \rangle_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (M(t_i) - M(t_{i-1}))^2$$

Dans le cas d'un mouvement brownien standard  $\{W_t\}$ ,  $\langle W \rangle_t = t$  (p.s).

**Remarque :** Si  $M_1$  et  $M_2$  sont deux martingales (continues et de carré intégrable) alors :  $M_1(t)M_2(t) - \langle M_1, M_2 \rangle_t$  est une martingale par rapport à la même filtration (Yong et Zhou, 1999).

## 1.3 Équations différentielles stochastiques (EDS)

$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$  est un espace de probabilité filtré.

**Définition 1.3.1.** Une *équation différentielle stochastique (EDS)* est une équation de la forme :

$$\begin{cases} dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X)dw(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

où

- $X_0 \in \mathbb{R}^n$
- $\{W_t\}$  est un mouvement brownien
- $\mu(t, X)$  et  $\sigma(t, X)$  sont des fonctions continues.

**Définition 1.3.2.** Une solution forte de l'EDS (1.2) est un processus  $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$  continu qui est  $\{\mathcal{F}_t\}$ -adapté et tel que :

- $\int_0^t (|\mu(s, X)|^2 + |\sigma(s, X)|^2) ds < \infty$
- $X$  vérifie (1.2)

### 1.3.1 Condition d'existence et d'unicité d'une solution forte

On rappelle que  $L_{\mathcal{F}}^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$  désigne l'ensemble des variables aléatoires  $\mathcal{F}$ -mesurables  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  telles que  $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$  ( $p \in [1, \infty)$ ).

**Théorème 1.3.3.** Si les fonctions  $\mu(t, X(\cdot))$  et  $\sigma(t, X(\cdot))$  sont lipschitziennes, c'est-à-dire qu'il existe  $L > 0$  tel que :

$$\begin{cases} |\mu(t, x(\cdot)) - \mu(t, y(\cdot))| \leq L|x(\cdot) - y(\cdot)| \\ |\sigma(t, x(\cdot)) - \sigma(t, y(\cdot))| \leq L|x(\cdot) - y(\cdot)|, \end{cases} \quad (1.3)$$

et si de plus

$$|\mu(t, X(\cdot))| + |\sigma(t, X(\cdot))| \in L^2(0, T; \mathbb{R}) \quad (1.4)$$

alors, pour tout  $X_0 \in L_{\mathcal{F}_0}^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$  ( $p \geq 1$ ), il existe une et une seule solution forte  $X$  de (1.2) qui vérifie :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(\sup_{0 \leq s \leq T} |X(s)|^p) \leq K_T(1 + \mathbb{E}(|X_0|^p)), \\ \mathbb{E}(|X(t) - X(s)|^p) \leq K_T(1 + \mathbb{E}(|X_0|^p))|t - s|^{\frac{p}{2}}, \quad \forall s, t \in [0, T], \quad K_T > 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Par ailleurs, si  $\hat{X}_0 \in L_{\mathcal{F}_0}^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$  est une autre variable aléatoire correspondant à  $\hat{X}$ , solution de l'équation (1.2), alors pour tout  $T > 0$ , il existe  $K_T > 0$  tel que :

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \leq s \leq T} |X(s) - \hat{X}(s)|^p) \leq K_T(1 + \mathbb{E}(|X_0 - \hat{X}_0|^p)).$$

Pour la démonstration de ce théorème, voir (Yong et Zhou, 1999)

**Exemple :** L'équation de Black-Scholes.

$$\begin{cases} dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dB(t) \\ X(0) = 1 \end{cases}$$

Ici  $\mu(t, X(t)) = \mu X(t)$  et  $\sigma(t, X(t)) = \sigma X(t)$  sont manifestement lipschitziennes et vérifient (1.4), donc l'équation de Black-Scholes avec la condition initiale  $X_0 = 1$  ci-dessus, admet une et une seule solution  $X_t = e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}$ .  $\mu \in \mathbb{R}$  est appelé le coefficient de dérive (il traduit la tendance générale du processus) et  $\sigma > 0$  est le coefficient de diffusion (il traduit la variabilité ou «volatilité» du processus).

**Remarque :** À côté des solutions fortes, on définit les solutions faibles. La différence entre les deux étant que dans le cas des solutions faibles, l'espace de probabilité filtré qui n'est pas fixé à priori, fait partie de la solution.

### 1.3.2 Équations différentielles stochastiques rétrogrades

Introduites par Bismut (1973) dans le cas linéaire et par Pardoux et Peng (1990) dans le cas général, les équations différentielles stochastiques rétrogrades (car la valeur terminale de la fonction inconnue est donnée), en abrégé EDSR, apparaissent dans de nombreux problèmes en finance.

Selon les auteurs sus-cités, une solution d'une EDSR est une paire de processus adaptés  $(Y, Z)$  satisfaisant :

$$\begin{cases} dY_t = -f(t, Y_t, Z_t)dt + Z_t' dW_t, \\ Y_T = \xi, \end{cases} \quad (1.6)$$

où  $Z'$  est la transposée de  $Z$ .

**Théorème 1.3.4.** *On suppose que :*

- $f$  est uniformément lipschitzienne, c-à-d qu'il existe  $C > 0$  tel que :  
 $|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)| \leq C(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|) \quad \forall (y_1, z_1), \forall (y_2, z_2).$
- $f(\cdot, 0, 0)$  est de carré intégrable, c-à-d  $\mathbb{E}(\int_0^T |f(t, 0, 0)|^2 dt) < +\infty$
- $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ , c-à-d  $\mathbb{E}(|\xi|^2) < +\infty$

Alors, il existe une paire de processus adaptés  $(Y, Z)$  qui satisfait l'EDSR (1.6).

*Démonstration.* Voir (El Karoui et Mazliak, 1997).

□

## CHAPITRE II

### FORMULATION DU PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL STOCHASTIQUE.

Dans ce chapitre, nous donnons une formulation du problème du contrôle optimal stochastique. C'est le véritable point de départ de notre travail. Il s'agit essentiellement d'exposer un ensemble de conditions et d'équations mathématiques que doit vérifier le contrôle, soit la solution optimale. En clair, il est simplement question d'optimiser (maximiser ou minimiser) une fonction de coût  $J$ . Afin de mieux appréhender la quintessence du problème du contrôle optimal stochastique, il semble opportun de commencer par en citer quelques exemples.

#### 2.1 Quelques exemples de problèmes

Nous allons dans cette première partie énoncer deux exemples intéressants. Le premier, *Réassurance et gestion des dividendes* est un problème relativement nouveau et largement exploré. Sa première version fut introduite en 1996 par Leland-Toft, mais ne comprenait cependant pas de problème d'optimisation. Nous discutons ici d'un cas plus complexe où une compagnie d'assurance désire optimiser les dividendes qu'elle verse à ses actionnaires à travers une suite de décisions optimales qu'elle devra prendre.

Le deuxième exemple, bien connu dans le monde de la finance, est le problème du portefeuille de Merton énoncé et résolu en 1969 par Robert C. Merton : *Investissement et consommation*. Un investisseur dans un temps limité doit effectuer des allocations de sa richesse sur des actions et des obligations (sans risque) afin de maximiser son



*utilité*. Dans ce qui suit nous présentons ces exemples en détail.

### 2.1.1 Exemple 1 : Réassurance et gestion des dividendes

Considérons un modèle dans une compagnie d'assurance A, qui permet de choisir une police d'assurance auprès d'une autre compagnie B dans le but de se couvrir d'une partie des risques. Cette opération qu'on appelle *réassurance* est d'usage dans le monde des assurances. Notre compagnie A a le choix du montant des dividendes qu'elle verse à ses actionnaires. De plus, A doit constamment rembourser une dette corporative (un emprunt auprès d'une banque par exemple), le remboursement instantané est  $\delta$ . Il est commun d'évaluer une compagnie à travers le montant des dividendes qu'elle reverse. Alors, le but de A est donc de trouver la police de réassurance et la stratégie sur les dividendes qui lui permettront de maximiser le total des dividendes actualisés sur une période donnée.

Pour modéliser un tel problème, considérons  $R(t)$  le total des actifs liquides de A au temps  $t$ . Évidemment,  $R(t)$  est influencé par le montant  $p$  des primes encaissées par unité de temps, par le remboursement constant de la dette, et par le paiement des réclamations faites par les clients. Soit  $V(t)$  le nombre de réclamations au temps  $t$ , et  $\eta_i$  la montant de la  $i^e$  réclamation. On peut donc écrire :

$$R(t) = R(0) + pt - \delta t - \sum_{i=1}^{V(t)} \eta_i \quad (2.1)$$

Si  $V(t)$  est un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ , et que les réclamations sont i.i.d., alors  $R(t)$  peut être approximé par un mouvement brownien de dérive  $p - \delta - \lambda\mathbb{E}(\eta)$  et de coefficient de diffusion  $(\lambda\mathbb{E}(\eta^2))^{\frac{1}{2}}$

Mais le contrat de réassurance permet à la compagnie A de conserver juste une proportion  $a$  du montant des primes, donc de reverser  $1 - a$  à la compagnie B. En conséquence,  $1 - a$  des réclamations sera à la charge de B. Donc dans l'équation (2.1),  $p$  sera remplacé par  $ap$ ,  $\eta_i$  par  $a\eta_i$ . On construit ainsi le modèle qui suit :

Soient  $x(t)$  le volume d'argent liquide dont dispose la compagnie à l'instant  $t$ ,  $c(t)$  le

taux de dividende payé aux actionnaires à l'instant  $t$ . Alors la dynamique de  $x(t)$  est donnée par :

$$\begin{cases} dx(t) = [a(t)\mu - \delta - c(t)]dt + a(t)\sigma dW(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Ici  $\mu$  est la différence entre le taux de la prime et le paiement espéré des réclamations par unité de temps,  $1 - a(t)$  est la fraction de réassurance au temps  $t$ . Par la nature du problème, on a les contraintes ci-dessous :

$$x(t) \geq 0, \quad 0 \leq a(t) \leq 1, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.3)$$

L'objectif de l'équipe dirigeante de la compagnie est donc de choisir le schéma de paiement des dividendes  $c(\cdot)$  et la politique de gestion de risque  $a(\cdot)$ , tous les deux non anticipables, tels que (2.3) soit satisfaite, et le total espéré des dividendes :

$$J(c(\cdot), a(\cdot)) = \mathbb{E} \left( \int_0^T e^{-\gamma t} c(t) dt \right) \quad (2.4)$$

soit maximal sur  $[0, T]$ . Noter que  $\gamma$  est le taux d'actualisation.

### 2.1.2 Exemple 2 : Investissement et consommation.

Considérons un marché dans lequel  $m + 1$  actifs sont échangés continuellement. L'un d'entre eux qu'on appelle *obligation* est tel que le processus de prix  $P_0(t)$  vérifie l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} dP_0(t) = r(t)P_0(t)dt, & t \in [0, T], \\ P_0(0) = p_0 > 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

où  $r(t) > 0$  est le taux d'intérêt (de l'obligation). Il est clair que  $P_0(t)$  augmentera constamment dans le temps. Les  $m$  autres actifs sont appelés *actions*, et les prix  $P_1(t), \dots, P_m(t)$  satisfont l'équation différentielle :

$$\begin{cases} dP_i(t) = P_i(t)\{b_i(t)dt + \sigma_i(t) \cdot dW(t)\}, & t \in [0, T], \\ P_i(0) = p_i > 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

Où  $b_i : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b_i(t) > 0$  est appelé le *taux d'appréciation*, et  $\sigma_i : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  est appelé la *volatilité* ou encore *dispersion* des actions. Tous ces processus sont supposés

$\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -adaptés. Ici,  $\{W_t\}$  est un mouvement brownien standard  $m$ -dimensionnel défini sur un espace de probabilité filtré et complet  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ . Le terme de *diffusion*  $\langle \sigma_i(t), dW(t) \rangle$  de (2.6) reflète la fluctuation du prix des actions, qui sont par conséquent des actifs risqués. Pour intéresser les éventuels acheteurs, il est naturel de supposer :

$$\mathbb{E}(b_i(t)) > r(t) > 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad 1 \leq i \leq m. \quad (2.7)$$

Considérons maintenant un investisseur détenant  $N_i(t)$  parts de l'actif  $i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) à l'instant  $t$ , nous noterons  $x(t)$  sa richesse totale. Alors :

$$x(t) = \sum_{i=0}^m N_i(t) P_i(t), \quad t \geq 0. \quad (2.8)$$

On suppose que les transactions des actions et le paiement des *dividendes* (au taux  $\mu_i(t)$  par unité de temps et par unité de capital investi sur le  $i^e$  actif) s'effectuent de manière continues. Soit  $c(t)$  le taux de retrait du marché par l'investisseur pour consommation. On a donc :

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \sum_{i=0}^m N_i(t) [P_i(t + \Delta t) - P_i(t)] + \sum_{i=1}^m \mu_i(t) N_i(t) P_i(t) \Delta t - c(t) \Delta t. \quad (2.9)$$

En faisant  $\Delta t \rightarrow 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} dx(t) &= \sum_{i=0}^m N_i(t) dP_i(t) + \sum_{i=1}^m \mu_i(t) N_i(t) P_i(t) dt - c(t) dt \\ &= \{r(t) N_0(t) P_0(t) + \sum_{i=1}^m [b_i(t) + \mu_i(t)] N_i(t) P_i(t) - c(t)\} dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^m N_i(t) P_i(t) \sigma_i(t) \cdot dW(t) \\ &= \{r(t) x(t) + \sum_{i=1}^m [b_i(t) + \mu_i(t) - r(t)] u_i(t) - c(t)\} dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \sigma_i(t) u_i(t) \cdot dW(t), \end{aligned} \quad (2.10)$$

où

$$u_i(t) = N_i(t) P_i(t), \quad i = 0, \dots, m \quad (2.11)$$

est la richesse de l'investisseur sur le  $i^e$  actif. Lorsque  $u_i(t) < 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), il/elle est à court du  $i^e$  actif. Quand  $u_0(t) < 0$ , l'investisseur emprunte le montant  $|u_0(t)|$  au taux d'intérêt  $r(t)$ . Il est clair qu'en changeant  $u_i(t)$ , notre investisseur change l'allocation de sa richesse sur les  $m + 1$  actifs.  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$  est le portefeuille de l'investisseur. Remarquons que l'allocation faite à l'obligation n'apparaît pas dans le portefeuille,

puisque ce dernier est entièrement déterminé par l'allocation effectuée sur les actions, étant donnée la richesse totale. Maintenant, pour  $x(0) = x_0 > 0$ , notre investisseur veut la stratégie d'investissement  $u(\cdot)$  et le plan de consommation  $c(\cdot)$  tels que :

$$x(t) \geq 0, \quad \forall t \in [0, T], p.s. \quad (2.12)$$

et le flux *d'utilité* actualisé :

$$J(u(\cdot), c(\cdot)) = \mathbb{E} \left\{ \int_0^T e^{-\gamma t} \varphi(c(t)) dt + e^{-\gamma T} h(X(T)) \right\}, \quad (2.13)$$

est maximal ;  $\gamma > 0$  est le taux d'actualisation,  $\varphi(c)$  est l'utilité de la consommation  $c$ , et  $e^{-\gamma T} h(X(T))$  est l'utilité actualisé provenant des legs (richesse terminale). On pourrait bien évidemment imposer des contraintes supplémentaires, par exemple :

$$u_i(t) \geq -L_i, \quad \forall t \in [0, T], p.s., i = 0, 1, \dots, n, \quad \forall L_i \geq 0.$$

$L_i = 0$  signifie que la vente à découvert est interdite.

## 2.2 Formulation du problème du contrôle optimal stochastique

Aux exemples ci-dessus présentés, peuvent s'ajouter bien d'autres dans des domaines tels : l'industrie, la médecine, etc.... Cependant, le principe mathématique qui permet de formuler ces différents types de problèmes est le même. C'est à cela que nous nous attaquons dans ce qui suit.

### 2.2.1 Formulation (forte)

Soit un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$  sur lequel est défini un mouvement brownien standard  $m$ -dimensionnel  $W(\cdot)$ . Considérons l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dx(t) = b(t, x(t), u(t))dt + \sigma(t, x(t), u(t))dW(t), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.14)$$

Où  $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ , et  $U$  un espace métrique séparable,  $T \in [0, +\infty[$  fixé.  $x(\cdot)$  est la *variable d'état*,  $u(\cdot)$  est appelé le *contrôle* et

représente la décision prise par le *contrôleur*. À chaque instant  $t$ , ce dernier détient un historique d'information  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ , mais est cependant incapable de prédire le futur à cause du critère de non-anticipation. D'où l'expression « $u(\cdot)$  est  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -adapté». La décision  $u(t)$  ne peut être prise avant l'instant  $t$ . On définit ainsi :  $\mathcal{U}[0, T] = \{u : [0, T] \times \Omega \rightarrow U \mid u(\cdot) \text{ est } \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0} \text{-adapté}\}$ .

Tout élément  $u(\cdot)$  de  $\mathcal{U}[0, T]$  est appelé *contrôle réalisable*. La contrainte d'état peut être donnée par l'écriture :  $x(t) \in S(t)$ , avec  $S : [0, T] \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ . Par ailleurs, on définit le critère à optimiser, la *fonction de coût* par :

$$J(u(\cdot)) = \mathbb{E} \left\{ \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt + h(x(T)) \right\}. \quad (2.15)$$

**Définition 2.2.1.** Un contrôle  $u(\cdot)$  est dit admissible, et  $(x(\cdot), u(\cdot))$  une paire admissible si :

- i)  $u(\cdot) \in \mathcal{U}[0, T]$ ;
- ii)  $x(\cdot)$  est l'unique solution de l'équation (2.14) et vérifie les éventuelles contraintes imposées;
- iii)  $f(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)) \in L^1_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R})$  et  $h(x(T)) \in L^1_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R})$ .

On note par  $\mathcal{U}_{ad}[0, T]$  l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

**Problème (FO) :** «Minimiser (2.15) sur  $\mathcal{U}_{ad}[0, T]$ ».

S'il existe, on cherche le contrôle  $\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}[0, T]$  tel que :

$$J(\bar{u}(\cdot)) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}[0, T]} J(u(\cdot)). \quad (2.16)$$

Alors  $\bar{u}(\cdot)$  sera appelé *contrôle optimal*. Et le problème est dit *fini* si le membre de droite de (2.16) est fini.

**Remarque :** Il existe pour le problème du contrôle optimal une autre formulation d'un aspect plus mathématique, c'est la formulation dite *faible* du problème du contrôle optimal stochastique. À la différence de la formulation forte (qui est adaptée à des situations pratiques), l'espace de probabilité n'est pas fixé à priori dans ce cas, il fait partie de la solution qui est un 6-uplet  $\bar{\pi}$  de la forme  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P, W(\cdot), u(\cdot))$ .

### 2.2.2 Formulation (faible)

Un intérêt de cette formulation, on le verra plus loin, est que son utilisation permet souvent d'aboutir à des solutions fortes.

On définit  $\mathcal{U}_{ad}^\omega[0, T]$  l'ensemble des 6-uplets  $\pi = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, W(\cdot), P, u(\cdot))$  satisfaisant les conditions suivantes :

- i)  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$  est un espace de probabilité filtré ;
- ii)  $\{W(t)\}_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien standard  $m$ -dimensionnel défini sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$  ;
- iii)  $u(\cdot)$  est un processus  $\{\mathcal{F}\}_{t \geq 0}$ -adapté sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  à valeurs dans  $U$  ;
- iv)  $x(\cdot)$  est solution de (2.14) sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$  sous  $u(\cdot)$  ;
- v) les contraintes éventuelles sur  $x(t)$  sont satisfaites ;
- vi)  $f(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)) \in L^1_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R})$  et  $h(x(T)) \in L^1_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R})$ .  $L^1_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R})$  et  $L^1_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R})$  sont définies sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$  associé au 6-uplet  $\pi$ .

Les éléments  $\pi \in \mathcal{U}_{ad}^\omega[0, T]$  sont des contrôles admissibles.

**Problème (FA) :** «Minimiser (2.15) sur  $\mathcal{U}_{ad}^\omega[0, T]$ ».

On cherche le 6-uplet  $\bar{\pi} \in \mathcal{U}_{ad}^\omega[s, T]$  s'il existe, tel que :

$$J(\bar{\pi}) = \inf_{\pi \in \mathcal{U}_{ad}^\omega[s, T]} J(\pi). \quad (2.17)$$

Voilà, nous venons ainsi d'appréhender et formuler le problème du contrôle optimal stochastique . Une question naturelle qui nous vient toute suite à l'esprit est celle de savoir comment mettre en évidence la solution optimale.

## CHAPITRE III

### PRINCIPE DU MAXIMUM ET PROGRAMMATION DYNAMIQUE.

Dans ce chapitre, nous étudions deux approches de résolution du problème du contrôle optimal stochastique. La première, vérifiée dans les années 50 par Pontryagin et son équipe, énonce une condition nécessaire (et suffisante dans certains cas) d'optimalité, c'est *le principe du maximum*. Il stipule que tout contrôle optimal et la trajectoire associée vérifient un système d'équations différentielles de type hamiltonien. Nous regardons d'abord le cas des problèmes sans contraintes sur la variable d'état, et explorons par la suite celui avec contraintes. La deuxième approche, la *programmation dynamique*, consiste, quant à elle, à établir une relation entre une famille sous-problèmes considérés, pour ensuite les résoudre à travers une équation aux dérivées partielles du second ordre, l'*équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman* (HJB, en abrégé). Lorsque cette équation est résoluble analytiquement ou numériquement, la *technique de vérification* que nous verrons plus loin dans ce chapitre, est une méthode utilisée pour obtenir le contrôle optimal. Malheureusement, l'équation HJB n'admet pas toujours des solutions assez régulières. C'est alors qu'intervient la notion de *solution de viscosité*. Pour commencer, nous allons d'abord énoncer un théorème d'existence du contrôle optimal.

#### 3.1 Existence du contrôle optimal.

Effectuons d'abord quelques hypothèses nécessaires.

### 3.1.1 Quelques hypothèses :

Nous conservons les notations du chapitre précédent.

- (S0)  $(U, d)$  est un espace polonais (espace métrique complet séparable).
- (S1) Il n'y a pas de contraintes sur la variable d'état.
- (S2) Pour tout  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ , l'ensemble  $(b, f)(t, x, U) = \{(b_i(t, x, u), f(t, x, u)) \mid u \in U, i = 1, 2, \dots, n\}$  est convexe et fermé dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ .
- (S3) Les fonctions  $b, \sigma, f$  et  $h$  sont mesurables, et il existe  $L > 0$  et une fonction  $\bar{\omega} : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  tels que pour  $\varphi = b, \sigma, f, h$ , on a :

$$\begin{cases} |\varphi(t, x, u) - \varphi(t, \hat{x}, \hat{u})| \leq L|x - \hat{x}| + \bar{\omega}(d(u, \hat{u})), \\ \forall t \in [0, T], x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n, u, \hat{u} \in U, \\ |\varphi(t, 0, u)| \leq L, \quad \forall (t, u) \in [0, T] \times U. \end{cases} \quad (3.1)$$

- (S4)  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  est la filtration naturelle générée par  $W(\cdot)$ , augmentée des ensembles négligeables éléments de  $\mathcal{F}$ .
- (S5) Les fonctions  $b, \sigma, f$  et  $h$  sont  $C^2$  en  $x$ , et de plus, il existe  $L > 0$  et une fonction  $\bar{\omega} : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  tels que pour  $\varphi = b, \sigma, f, h$ , on a :

$$\begin{cases} |\varphi_x(t, x, u) - \varphi_x(t, \hat{x}, \hat{u})| \leq L|x - \hat{x}| + \bar{\omega}(d(u, \hat{u})), \\ |\varphi_{xx}(t, x, u) - \varphi_{xx}(t, \hat{x}, \hat{u})| \leq \bar{\omega}|x - \hat{x}| + d(u, \hat{u}), \\ \forall t \in [0, T], x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n, u, \hat{u} \in U. \end{cases} \quad (3.2)$$

**Théorème 3.1.1.** (*Existence du contrôle optimal*)

*Sous les conditions (S0)-(S3), si le problème (FA) est fini, alors il admet un contrôle optimal.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{V}[0, T]$  l'ensemble des fonctions mesurables de  $[0, T]$  à  $U$  et soit  $(x_j(\cdot), u_j(\cdot))$  une suite telle que pour  $j \rightarrow \infty$  on a :

$$J(u_j(\cdot)) \rightarrow \inf_{\mathcal{V}[0, T]} J(u(\cdot)).$$

D'après (S3), les suites  $x_j(\cdot), b(\cdot, x_j(\cdot), u_j(\cdot))$ , et  $f(\cdot, x_j(\cdot), u_j(\cdot))$  sont uniformément bornées en  $j$ . Alors  $x_j(\cdot)$  est équicontinue (à cause de l'équation d'état). Il est donc possible



de trouver une sous suite telle que pour  $j \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{cases} x_j(\cdot) \rightarrow \bar{x}(\cdot), & \text{dans } C([0, T]; \mathbb{R}^n), \\ b(\cdot, x_j(\cdot), u_j(\cdot)) \rightarrow \bar{b}(\cdot), & \text{faiblement dans } L^2(0, T; \mathbb{R}^n), \\ f(\cdot, x_j(\cdot), u_j(\cdot)) \rightarrow \bar{f}(\cdot), & \text{faiblement dans } L^2(0, T; \mathbb{R}^n), \\ h(x_j(T)) \rightarrow h(\bar{x}(T)), & \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.3)$$

En raison de la première convergence de (3.3) et le théorème de Mazur (Yosida, K. , 1980)[p. 120, Théorème 2]), il existe  $\alpha_{ij} \geq 0$  avec  $\sum_{i \geq 1} \alpha_{ij} = 1$ , tel que pour  $j \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{cases} \sum_{i \geq 1} \alpha_{ij} b(\cdot, \bar{x}_j(\cdot), u_{i+j}(\cdot)) \rightarrow \bar{b}(\cdot), & \text{fortement dans } L^2(0, T; \mathbb{R}^n), \\ \sum_{i \geq 1} \alpha_{ij} f(\cdot, \bar{x}_j(\cdot), u_{i+j}(\cdot)) \rightarrow \bar{f}(\cdot), & \text{fortement dans } L^2(0, T; \mathbb{R}^n). \end{cases} \quad (3.4)$$

Ainsi, l'hypothèse (S2) nous permet d'écrire :

$$(\bar{b}(t), \bar{f}(t)) \in (b, f)(t, \bar{x}, U).$$

Donc, d'après le lemme de Filippov (voir Li-Yong [1, p. 102, corollaire 2.26]), il existe un  $\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{V}[0, T]$  tel que

$$\bar{b}(t) = b(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)), \quad \bar{f}(t) = f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)), \quad t \in [0, T].$$

$(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$  est alors une paire admissible du problème (FA). De plus, par le lemme de Fatou, on obtient :

$$\begin{aligned} J(\bar{u}(\cdot)) &= \int_0^T f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt + h(\bar{x}(T)) \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_{i \geq 1} \alpha_{ij} \left\{ \int_0^T f(t, x_{i+j}(t), u_{i+j}(t)) dt + h(x_{i+j}(T)) \right\} \\ &= \liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_{i \geq 1} \alpha_{ij} J(u_{i+j}(\cdot)) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{V}[0, T]} J(u(\cdot)). \end{aligned}$$

En conclusion,  $\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{V}[0, T]$  est un contrôle optimal.  $\square$

**Remarque :** On démontre l'existence du contrôle optimal dans le cas de la formulation forte seulement pour le problème (FL) qui se caractérise par le fait que l'équation

d'état associée est linéaire, c-à-d de la forme :

$$\begin{cases} dx(t) = [Ax(t) + Bu(t)]dt + [Cx(t) + Du(t)]dW(t), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.5)$$

où  $A, B, C, D$  sont des matrices convenablement choisies.  $x(\cdot)$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , et  $u(\cdot) \in \mathcal{U}^L[0, T] = \{u(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^k) \mid u(t) \in U, t \in [0, T], P - p.s.\}$

Le contrôle existera donc si le problème est fini, et  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  est convexe et compact avec les fonctions  $f$  et  $h$  convexes.

## 3.2 Le principe du maximum stochastique

### 3.2.1 Cas sans contrainte sur la variable d'état

Commençons par rappeler la formulation du problème du contrôle optimal : soit un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$  sur lequel est défini un mouvement brownien standard  $m$ -dimensionnel  $W(\cdot)$ . Considérons l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dx(t) = b(t, x(t), u(t))dt + \sigma(t, x(t), u(t))dW(t), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ , et  $U$  un espace métrique séparable.  $T \in [0, +\infty[$  fixé.

On définit la *fonction de coût* :

$$J(\cdot) = \mathbb{E} \left\{ \int_0^T f(t, x(t), u(t))dt + h(x(T)) \right\}. \quad (3.7)$$

Et on définit également  $\mathcal{U}[0, T] = \{u : [0, T] \times \Omega \rightarrow U \mid u(\cdot) \text{ est } \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0} - \text{adapté}\}$ .

**Problème sans contrainte (SC) :** «Minimiser (3.7) sur  $\mathcal{U}[0, T]$ ».

S'il existe, on cherche le contrôle  $\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{U}[0, T]$  tel que :

$$J(\bar{u}(\cdot)) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}[0, T]} J(u(\cdot)). \quad (3.8)$$

Les quantités  $\bar{x}(\cdot) \equiv (\cdot, \bar{u}(\cdot))$  et  $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$  sont appelées respectivement *trajectoires optimales* et *paires optimales*.

Voilà ainsi défini le problème du contrôle optimal stochastique (sans contrainte). Nous allons maintenant nous munir d'outils nécessaires pour énoncer notre principe du maximum. Rappelons que le but visé ici, est de donner une condition nécessaire d'optimalité.

### Equations adjointes

Dans cette partie, nous introduisons les équations adjointes, impliquées dans le principe du maximum stochastique et le système hamiltonien associé. Il s'agit d'ED-SRs (équations différentielles stochastiques rétrogrades) que l'on devra être capable de résoudre afin d'obtenir le contrôle optimal. Une discussion plus approfondie sur leur théorie est disponible dans (Yong et Zhou, 1999).

a) Première équation :

$$\begin{cases} dp(t) = -\{b_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))^\top p(t) + \sum_{j=1}^m \sigma_x^j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))^\top q_j(t) \\ \quad - f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\} dt + q(t) dW(t), & t \in [0, T] \\ p(T) = -h_x(\bar{x}(T)). \end{cases} \quad (3.9)$$

b) Deuxième équation :

$$\begin{cases} dP(t) = -\{b_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))^\top P(t) + P(t)b_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \\ \quad + \sum_{j=1}^m \sigma_x^j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))^\top P(t)\sigma_x^j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \\ \quad + \sum_{j=1}^m \{\sigma_x^j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))^\top Q_j(t) + Q_j(t)\sigma_x^j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \\ \quad + H_{xx}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t), q(t))\} dt + \sum_{j=1}^m Q_j(t) dW^j(t), \\ P(T) = -h_{xx}(\bar{x}(T)), \end{cases} \quad (3.10)$$

où l'hamiltonien  $H$  est défini par :

$$H(t, x, u, p, q) = \langle p, b(t, x, u) \rangle + \text{tr}[q^\top \sigma(t, x, u)] - f(t, x, u), \quad (3.11)$$

Avec  $(t, x, u, p, q) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times m}$ , et  $(p(\cdot), q(\cdot)) \in L_{\mathcal{F}}^2(0, T; \mathbb{R}^n) \times (L_{\mathcal{F}}^2(0, T; \mathbb{R}^n))^m$  est la solution  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -adaptée de (3.9).

$(P(\cdot), Q(\cdot)) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{S}^n) \times (L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{S}^n))^m$  est la solution  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -adaptée de (3.10).  
Et,  $\mathbb{S}^n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^\top = A\}$ .

Les équations (3.9) et (3.10) s'appellent *équation adjointe du premier ordre* et *équation adjointe du second ordre*, respectivement. Avant d'énoncer le principe du maximum stochastique, définissons la fonction  $\mathcal{H}$  par :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, x, u) = & \\ & H(t, x(t), u(t), p(t), q(t)) - \frac{1}{2} \text{tr} [\sigma(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))^\top P(t) \sigma(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))] \\ & + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ [\sigma(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - \sigma(t, \bar{x}(t), u)]^\top P(t) \right. \\ & \left. \cdot [\sigma(t, x, u) - \sigma(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))] \right\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

**Théorème 3.2.1.** (*Principe du maximum stochastique*)

On suppose que les conditions (S0), (S3)-(S5) sont satisfaites. Soit  $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$  une paire optimale du problème (SC). Alors il existe des paires de processus

$$\begin{cases} (p(\cdot), q(\cdot)) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^n) \times (L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^n))^m, \\ (P(\cdot), Q(\cdot)) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{S}^n) \times (L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{S}^n))^m, \end{cases} \quad (3.13)$$

satisfaisant les équations adjointes (3.9) et (3.10) respectivement, et telles que :

$$\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), u), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.14)$$

La relation (3.14) est appelée *la condition du maximum*. Une démonstration détaillée de ce théorème se retrouve dans (Yong et Zhou, 1999).

En utilisant l'hamiltonien  $H$ , les systèmes (3.6) et (3.9) peuvent être réécrits de la manière suivante :

$$\begin{cases} dx(t) = H_p(t, x(t), u(t), p(t), q(t))dt + H_q(t, x(t), u(t), p(t), q(t))dW(t), \\ dp(t) = -H_x(t, x(t), u(t), p(t), q(t)) + q(t)dW(t), \quad t \in [0, T], \\ x(0) = x_0 \quad p(T) = -h_x(x(T)). \end{cases} \quad (3.15)$$

**Définition 3.2.2.** On appelle système hamiltonien, le système d'équations différentielles obtenu par combinaison de (3.15), (3.10), et (3.14).

**Théorème 3.2.3.** (*Deuxième version du principe du maximum*).

On suppose que les conditions (S3)-(S5) sont satisfaites. Soit  $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$  une paire optimale du problème (SC). Alors le 6-uplet  $(x(t), u(t), p(t), q(t), P(t), Q(t))$ , satisfait le système hamiltonien.

### 3.2.2 Condition suffisante d'optimalité

On se munit d'abord de la condition supplémentaire suivante :

(S6)  $U$  est un domaine convexe de  $\mathbb{R}^k$ . Les fonctions  $b, \sigma$  et  $f$  sont localement lipschitziennes en  $u$ , et leurs dérivées en  $x$  sont continues en  $(x, u)$ .

**Théorème 3.2.4.** (*Condition suffisante d'optimalité*)

On suppose que :

- i) (S0), (S3)-(S6) sont satisfaites,
- ii)  $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot), p(\cdot), q(\cdot), P(\cdot), Q(\cdot))$  est un 6-uplet admissible,
- iii)  $h(\cdot)$  est convexe,  $H(t, \cdot, \cdot, p(t), q(t))$  est concave pour tout  $t \in [0, T]$  et que :

$$\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), u), \quad t \in [0, T].$$

Alors,

$(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$  est une paire optimale du problème (SC).

Pour la démonstration de ce théorème, voir (Yong et Zhou, 1999).

### 3.2.3 Cas avec contrainte sur la variable d'état.

Considérons l'équation d'état (3.6) et la fonction de coût (3.7). On rajoute la contrainte suivante sur la variable d'état  $x$  :

$$\mathbb{E}\left(h(x(T))\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^T f(t, x(t), u(t))dt\right) \in \Gamma, \quad (3.16)$$

où  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  et  $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^l$  sont des fonctions données et  $\Gamma$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^l$ . Tout  $u \in \mathcal{U}[0, T]$  qui satisfait (3.16) est appelé *contrôle admissible*.

L'ensemble des contrôles admissibles se note  $\mathcal{U}_{ad}[0, T]$ .

**Problème avec contrainte (AC) :** «Minimiser (3.7) sur  $\mathcal{U}_{ad}[0, T]$ »

On cherche le contrôle  $\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}[0, T]$ , s'il existe, tel que :

$$J(\bar{u}(\cdot)) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}[0, T]} J(u(\cdot)). \quad (3.17)$$

Pour énoncer notre principe du maximum, nous avons besoin de la condition suivante :

(S7)  $\Gamma$  est convexe et fermé dans  $\mathbb{R}^l$ . Et de plus, chaque composante  $h^i$  de  $h$  et  $f^i$  de  $f$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ) vérifie les conditions (3.1) et (3.2).

**Définition 3.2.5.** On définit l'opérateur suivant appelé hamiltonien par :

$$H(t, x, u, p, q, \psi^0, \psi) = -\psi^0 f(t, x, u) - \langle \psi, f(t, x(t), u(t)) \rangle + \langle p, b(t, x, u) \rangle + \text{tr}[q^\top \sigma(t, x, u)],$$

$$(t, x, u, p, q, \psi^0, \psi) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^l.$$

**Théorème 3.2.6.** On suppose que les conditions (S0), (S3)-(S5) et (S7) sont satisfaites.

Soit  $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$  une paire optimale du problème (AC). Alors il existe

$(\psi^0, \psi) \in \mathbb{R}^{1+l}$  satisfaisant :

$$i) \psi^0 \geq 0, \quad |\psi^0|^2 + |\psi|^2 = 1,$$

$$ii) \langle \psi, z - \mathbb{E}\left(h(\bar{x}(T))\right) + \int_0^T \mathbb{E}\left(f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\right) dt \rangle \geq 0, \quad \forall z \in \Gamma,$$

et il existe des solutions adaptées

$$\begin{cases} (p(\cdot), q(\cdot)) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^n) \times (L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^n)^m, \\ (P(\cdot), Q(\cdot)) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{S}^n) \times (L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{S}^n)^m, \end{cases} \quad (3.18)$$

des équations adjointes suivantes :

$$\begin{cases} dp(t) = -H_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t), q(t), \psi^0, \psi) dt + q(t) dW(t), \\ p(T) = -\sum_{i=0}^l \psi^i h_x^i(\bar{x}(T)), \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} dP(t) = -\{b_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))^\top P(t) + P(t)b_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \\ \quad + \sum_{j=1}^m \sigma_x^j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))^\top P(t)\sigma_x^j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \\ \quad + \sum_{j=1}^m [\sigma_x^j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))^\top Q_j(t) + Q_j(t)\sigma_x^j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))] \\ \quad + H_{xx}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t), q(t), \psi^0, \psi)\}dt + \sum_{j=1}^m Q_j(t)dW^j(t), \\ P(T) = -\sum_{i=0}^l \psi^i h_{xx}^i(\bar{x}(T)), \end{array} \right. \quad (3.20)$$

telles que :

$$\begin{aligned} & H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t), q(t), \psi^0, \psi) - H(t, \bar{x}(t), u, p(t), q(t), \psi^0, \psi) \\ & - \frac{1}{2} \text{tr} \left( \{ \sigma(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - \sigma(t, \bar{x}(t), u) \}^\top P(t) \right. \\ & \quad \left. \cdot \{ \sigma(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - \sigma(t, \bar{x}(t), u) \} \right) \geq 0, \\ & \forall u \in U, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Pour la démonstration de ce théorème, voir (Yong et Zhou, 1999).

**Remarque :** Le cas où  $h=f=0$  et  $\Gamma = \mathbb{R}^n$  nous ramène au problème sans contrainte.

### 3.3 Programmation dynamique

La *programmation dynamique* est une technique mathématique développée dans les années 50 par Richard Bellman. L'idée de base est d'établir une relation entre une famille de sous-problèmes considérés, pour ensuite tous les résoudre par le biais d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, l'*équation d'hamilton-Jacobi-Bellman* (HJB). Malheureusement, cette dernière équation n'admet pas toujours des solutions assez régulières (qui ne sont pas suffisamment dérivables). Pour palier à cette lacune, on fera appel à la notion de *solution de viscosité* introduite par Crandall et Lions dans les années 80.

Pour commencer, nous allons définir les «sous-problèmes». En fait, leur formulation est très similaire à la formulation faible du problème du contrôle optimal que nous avons énoncée au chapitre 2. Il suffit de changer le temps et l'état initial dans (3.6).

Soit un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$  sur lequel est défini un mouvement brownien standard  $m$ -dimensionnel  $W(\cdot)$ , et soit  $(s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ . Considérons l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} dx(t) = b(t, x(t), u(t))dt + \sigma(t, x(t), u(t))dW(t), & t \in [s, T], \\ x(s) = y, \end{cases} \quad (3.22)$$

et soit la fonction de coût :

$$J(s, y; u(\cdot)) = \mathbb{E} \left\{ \int_s^T f(t, x(t), u(t))dt + h(x(T)) \right\}. \quad (3.23)$$

On définit  $\mathcal{U}^\omega[s, T]$  l'ensemble des 5-uplets  $(\Omega, \mathcal{F}, W(\cdot), P, u(\cdot))$  (que nous noterons simplement par  $u(\cdot)$ ) satisfaisant les conditions suivantes :

- i)  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est un espace de probabilité complet.
- ii)  $\{W(t)\}_{s \leq t \leq T}$  est un mouvement brownien standard  $m$ -dimensionnel défini sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , avec  $W(s) = 0$  presque sûrement, et  $\mathcal{F}_t^s = \sigma\{(W(r) : s \leq r \leq t)\}$  augmentée des ensembles négligeables dans  $\mathcal{F}$ .
- iii)  $u : [s, T] \times \Omega \rightarrow U$  est un processus  $\{\mathcal{F}_t^s\}_{t \geq s}$ -adapté dans  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .
- iv) (3.22) admet une unique solution  $x(\cdot)$  sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t^s\}_{t \geq s}, P)$ .
- v)  $f(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)) \in L^1_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R})$  et  $h(x(T)) \in L^1_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R})$ .

**Sous-problème sans contrainte** ( $SC_{xy}$ ) : «Minimiser (3.23) sur  $\mathcal{U}^\omega[0, T]$ ». On cherche le 5-uplet  $\bar{u}(\cdot) \equiv (\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{W}(\cdot), \bar{P}, \bar{u}(\cdot)) \in \mathcal{U}^\omega[s, T]$  s'il existe, tel que :

$$J(t, y; \bar{u}(\cdot)) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}^\omega[s, T]} J(t, y; u(\cdot)). \quad (3.24)$$

**Définition 3.3.1.** On définit la fonction valeur du problème(SC) par :

$$\begin{cases} V(s, y) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}^\omega[s, T]} J(s, y; u(\cdot)), & \forall (s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \\ V(T, y) = h(y), & \forall y \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Notons que pour que la fonction valeur soit bien définie, il faudrait que  $J(t, y; u(\cdot))$  le soit, c'est à dire que les fonctions  $b, \sigma, f$  et  $h$  satisfassent la condition (S1)' suivante :

- i)  $b, \sigma, f$ , et  $h$  sont uniformément continues.



ii) Il existe  $L > 0$  tel que pour  $\varphi = b, \sigma, f, h$ , on a :

$$\begin{cases} |\varphi(t, x, u) - \varphi(t, \hat{x}, u)| \leq L|x - \hat{x}|, & \forall t \in [0, T], x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n, u, \hat{u} \in U, \\ |\varphi(t, 0, u)| \leq L, & \forall (t, u) \in [0, T] \times U. \end{cases} \quad (3.25)$$

Soit en plus, la condition :

(S2)'  $(U, d)$  est un espace polonais (espace métrique complet séparable).

**Théorème 3.3.2.** (*Principe d'optimalité de Bellman*)

On suppose les conditions (S1)' et (S2)' satisfaites. Alors pour tout  $(s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ ,

$\forall 0 \leq s \leq \hat{s} \leq T$ , on a :

$$V(s, y) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}^\omega[s, T]} \mathbb{E} \left\{ \int_s^{\hat{s}} f(t, x(t, s, y, u(\cdot)), u(t)) dt + V(\hat{s}, x(\hat{s}, y, u(\cdot))) \right\}. \quad (3.26)$$

*Démonstration.* voir (Yong et Zhou, 1999) □

On définit  $C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ , l'ensemble des fonctions continues  $v : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $v_x, v_t$ , et  $v_{xx}$  sont continues. L'*hamiltonien généralisé* est la fonction  $G(t, x, u, p, P)$  définie par :

$$\begin{aligned} G(t, x, u, p, P) &= \frac{1}{2} \text{tr}(P\sigma(t, x, u)\sigma(t, x, u)^\top) + \langle p, b(t, x, u) \rangle - f(t, x, u), \\ \forall (t, x, u, p, P) &\in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n. \end{aligned} \quad (3.27)$$

**Proposition 3.3.3.** *Sous les conditions (S1)'-(S2)' et pour  $T > 0$ , la fonction valeur  $V$  possède les propriétés suivantes :*

1.  $|V(s, y)| \leq K(1 + |y|)$ ,  $\forall (s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ ,  $K > 0$ .
2.  $|V(s, y) - V(\hat{s}, \hat{y})| \leq L \left\{ |y - \hat{y}| + (1 + |y| \vee |\hat{y}|) |s - \hat{s}|^{\frac{1}{2}} \right\}$ ,  $\forall s, \hat{s} \in [0, T]$ ,  
 $y, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $L > 0$ ,  $(a \vee b = \max(a, b))$ .
3. Si  $V \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ , alors  $V$  est solution de l'équation aux dérivées partielles du second ordre :

$$\begin{cases} -v_t + \sup_{u \in U} G(t, x, u, -v_x, -v_{xx}) = 0, & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \\ v|_{t=T} = h(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3.28)$$

L'équation (3.28) est appelée *équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB, en abrégé)*.

*Démonstration.* Pour démontrer 1), fixons  $(s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ .

Pour tout  $(\Omega, \mathcal{F}, W(\cdot), P, u(\cdot)) \in \mathcal{U}^\omega[s, T]$ , le théorème 1.3.3 du chapitre 1. permet d'écrire :

$$\mathbb{E}(\sup_{s \leq t \leq T} |x(t)|) \leq K_T(1 + |y|).$$

Les fonctions  $f$  et  $h$  étant localement lipschitziennes d'après (S1)', on en déduit qu'il existe  $K > 0$  tel que :

$$J(s, y; u(\cdot)) = \mathbb{E} \left\{ \int_s^T f(t, x(t), u(t)) dt + h(x(T)) \right\} \leq K(1 + |y|), \quad \forall u \in \mathcal{U}^\omega[s, T].$$

Ce qui entraîne  $|V(s, y)| \leq K(1 + |y|)$ .

Pour démontrer maintenant 2), soient  $\hat{s} \in [s, T]$ , et  $y, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$ . Pour tout  $(\Omega, \mathcal{F}, W(\cdot), P, u(\cdot)) \in \mathcal{U}^\omega[s, T]$ , soient  $x(\cdot)$  et  $\hat{x}(\cdot)$  les états correspondant à  $(s, y, u(\cdot))$  et  $(\hat{s}, \hat{y}, u(\cdot))$ , respectivement. En se servant encore du théorème 1.3.3, on a :

$$\mathbb{E}(\sup_{t \in [\hat{s}, T]} |x(t) - \hat{x}(t)|) \leq L_T \left\{ |y - \hat{y}| + (1 + |y| \vee |\hat{y}|) |s - \hat{s}|^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

En raison de (S1)', on obtient :

$$|J(s, y; u(\cdot)) - J(\hat{s}, \hat{y}; u(\cdot))| \leq L_T \left\{ |y - \hat{y}| + (1 + |y| \vee |\hat{y}|) |s - \hat{s}|^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

En prenant la borne inférieure pour les  $u(\cdot) \in \mathcal{U}^\omega[s, T]$ , on a le résultat 2).

Enfin, fixons  $(s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$  et  $u \in U$ . La formule d'Itô appliquée à  $V(s, x(s))$  nous donne

$$\begin{aligned} V(s, y) &= V(\hat{s}, x(\hat{s})) + \int_{\hat{s}}^s \left\{ V_t(t, x(t)) + \langle V_x(t, x(t)), b(t, x(t), u(t)) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \text{tr}[\sigma(t, x(t), u(t))^\top V_{xx}(t, x(t)) \sigma(t, x(t), u(t))] \right\} dt \\ &\quad + \int_{\hat{s}}^s \langle V_x(t, x(t)), \sigma(t, x(t), u(t)) dW_t \rangle. \end{aligned}$$

En prenant l'espérance de chaque côté, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V(s, y) - V(\hat{s}, x(\hat{s}))] &= -\mathbb{E} \int_{\hat{s}}^s \left\{ V_t(t, x(t)) + \langle V_x(t, x(t)), b(t, x(t), u(t)) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \text{tr}[\sigma(t, x(t), u(t))^\top V_{xx}(t, x(t)) \sigma(t, x(t), u(t))] \right\} dt, \end{aligned}$$

ou encore l'hamiltonien généralisé :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [V(s, y) - V(\hat{s}, x(\hat{s}))] &= \mathbb{E} \int_s^{\hat{s}} \left\{ -V_t(t, x(t)) + f(t, x(t), x(t), u), u(t)) \right. \\ &\quad \left. + G(t, x, u, -V_x(t, x(t)), -V_{xx}(t, x(t))) \right\} dt. \end{aligned}$$

D'après le principe d'optimalité de Bellman (3.26), on a :

$$V(s, y) - \mathbb{E} [V(\hat{s}, x(\hat{s}))] - \mathbb{E} \left\{ \int_s^{\hat{s}} f(t, x(t), x(t), u), u(t)) dt \right\} \leq 0$$

et en faisant  $\hat{s} \downarrow s$ , il vient que

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{1}{\hat{s} - s} \mathbb{E} \left[ \int_s^{\hat{s}} \{ -V_t(t, x(t)) + G(t, x, u, -V_x(t, x(t)), -V_{xx}(t, x(t))) \} dt \right], \\ &\rightarrow -V_t(s, y) + G(s, y, u, -V_x(s, y), -V_{xx}(s, y)), \quad \forall u \in U. \end{aligned}$$

L'inégalité étant valable pour tout  $u$ , on a donc

$$0 \geq -V_t(s, y) + \sup_{u \in U} G(s, y, u, -V_x(s, y), -V_{xx}(s, y)).$$

Réciproquement, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $0 \leq s \leq \hat{s} \leq T$  avec  $\hat{s} - s > 0$  suffisamment petit.

D'après (3.26), il existe  $u(\cdot) \equiv u_{\varepsilon, \hat{s}} \in \mathcal{U}^\omega[s, T]$  tel que :

$$V(s, y) + \varepsilon(\hat{s} - s) \geq \mathbb{E} \left\{ \int_s^{\hat{s}} f(t, x(t), x(t), u), u(t)) dt + V(\hat{s}, x(\hat{s})) \right\},$$

ce qui s'écrit encore

$$\begin{aligned} -\varepsilon &\leq \frac{\mathbb{E} [V(s, y) - V(\hat{s}, x(\hat{s}))]}{\hat{s} - s} - \frac{1}{\hat{s} - s} \mathbb{E} \left[ \int_s^{\hat{s}} f(t, x(t), x(t), u), u(t)) dt \right], \\ &= \frac{1}{\hat{s} - s} \int_s^{\hat{s}} \{ -V_t(t, x(t)) + G(t, x, u, -V_x(t, x(t)), -V_{xx}(t, x(t))) \} dt \\ &\leq \frac{1}{\hat{s} - s} \int_s^{\hat{s}} \{ -V_t(t, x(t)) + \sup_{u \in U} G(t, x, u, -V_x(t, x(t)), -V_{xx}(t, x(t))) \} dt \\ &\rightarrow -V_t(s, y) + \sup_{u \in U} G(s, y, u, -V_x(s, y), -V_{xx}(s, y)). \end{aligned}$$

Cette dernière limite provient du fait que  $b, \sigma$ , et  $f$  étant uniformément continues par (S1)', on a

$$\limsup_{t \downarrow s, y \in \mathbb{R}^n, u \in U} |\varphi(t, y, u) - \varphi(s, y, u)| = 0.$$

La démonstration est ainsi complétée.  $\square$

### 3.3.1 Solutions de viscosité

L'équation HJB n'admet en général pas de solutions régulières, c-à-d qui ne sont pas dans  $C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ . Les solutions de viscosité introduite par Crandall et Lions (1983) viennent palier à cette lacune.

**Définitions 3.3.4.** 1. Une fonction  $v \in C([0, T] \times \mathbb{R}^n)$  est une sous-solution de viscosité de (3.27) si :

$$v(T, x) \leq h(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

Et pour tout  $\varphi \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ , chaque fois que  $v - \varphi$  atteint un maximum local en  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ , on a :

$$-\varphi(t, x) + \sup_{u \in U} G(t, x, u, -\varphi_x(t, x), -\varphi_{xx})(t, x) \leq 0.$$

2. Une fonction  $v \in C([0, T] \times \mathbb{R}^n)$  est une sursolution de viscosité de (3.27) si :

$$v(T, x) \geq h(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

et pour tout  $\varphi \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ , chaque fois que  $v - \varphi$  atteint un minimum local en  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ , on a :

$$-\varphi(t, x) + \sup_{u \in U} G(t, x, u, -\varphi_x(t, x), -\varphi_{xx})(t, x) \geq 0.$$

3. Une fonction  $v \in C([0, T] \times \mathbb{R}^n)$  est une solution de viscosité de (3.27) si elle est à la fois sous-solution et sursolution de viscosité de (3.27).

**Théorème 3.3.5.** On suppose  $(S1)'$  et  $(S2)'$ . Alors la fonction valeur  $V$  est une solution de viscosité de (3.28).

### 3.3.2 Théorème de vérification

Nous allons énoncer un résultat clé de la programmation dynamique. Il nous permettra de vérifier qu'une paire admissible est optimale. Mieux, il nous propose comment construire un contrôle optimal à partir des sous-problèmes que nous avons énoncés plus haut. Nous commençons le cas où la solution de l'équation HJB est suffisamment dérivable.

**Théorème 3.3.6.** (*Théorème de vérification classique*)

On suppose (S1)' et (S2)' satisfaites. Soit  $v \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$  une solution de l'équation HJB, (3.27). Alors on a :

$$v(s, y) \leq J(s, y; u(\cdot)), \quad \forall u(\cdot) \in \mathcal{U}^\omega[s, T], (s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n.$$

De plus, une paire admissible  $(\bar{u}(\cdot), \bar{x}(\cdot))$  est optimale pour le problème  $(SC_{xy})$  si et seulement si :

$$\begin{aligned} v_t(t, \bar{x}(t)) &\equiv \max_{u \in U} G(t, \bar{x}(t), u, -v_x(t, \bar{x}(t)), -v_{xx}(t, \bar{x}(t))) \\ &= G(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), -v_x(t, \bar{x}(t)), -v_{xx}(t, \bar{x}(t))). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Soient  $u(\cdot) \in \mathcal{U}^\omega[s, T]$  et  $(s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ . On applique la formule d'Itô à  $v(s, x(s))$ .

$$\begin{aligned} v(s, y) &= v(T, x(T)) + \int_T^s \left\{ v_t(t, x(t)) + \langle v_x(t, x(t)), b(t, x(t), u(t)) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \text{tr}[\sigma(t, x(t), u(t))^\top v_{xx}(t, x(t)) \sigma(t, x(t), u(t))] \right\} dt \\ &\quad + \int_T^s \langle v_x(t, x(t)), \sigma(t, x(t), u(t)) dW_t \rangle \end{aligned}$$

Sachant que  $v(T, x(T)) = h(x(T))$ , en passant à l'espérance on a :

$$\begin{aligned} v(s, y) &= \mathbb{E}[h(x(T))] - \mathbb{E} \left[ \int_s^T \left\{ v_t(t, x(t)) + \langle v_x(t, x(t)), b(t, x(t), u(t)) \rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \text{tr}[\sigma(t, x(t), u(t))^\top v_{xx}(t, x(t)) \sigma(t, x(t), u(t))] \right\} dt \right]. \end{aligned}$$

En introduisant l'hamiltonien généralisé (3.27), on aboutit à :

$$\begin{aligned} v(s, y) &= \mathbb{E}[h(x(T))] + \mathbb{E} \left[ \int_s^T \left\{ [-v_t(t, x(t)) + f(t, x(t), u(t)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + G(t, x, u, -v_x(t, x(t)), -v_{xx}(t, x(t)) \right\} dt \right] \\ &= J(s, y, u(\cdot)) + \mathbb{E} \left[ \int_s^T \left\{ -v_t(t, x(t)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + G(t, x(t), u(t), -v_x(t, x(t)), -v_{xx}(t, x(t)) \right\} dt \right] \\ &\leq J(s, y, u(\cdot)) + \mathbb{E} \left[ \int_s^T \left\{ -v_t(t, x(t)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sup_{u \in U} G(t, x(t), u(t), -v_x(t, x(t)), -v_{xx}(t, x(t)) \right\} dt \right] \\ &= J(s, y, u(\cdot)). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Cette dernière égalité vient du fait que  $v$  est solution de l'équation HJB. On obtient ainsi l'inégalité souhaitée.

Ensuite, en appliquant la deuxième égalité de (3.29) à  $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ , on a :

$$\begin{aligned} v(s, y) &= J(s, y, \bar{u}(\cdot)) + \mathbb{E} \left[ \int_s^T \left\{ -v_t(t, \bar{x}(t)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + G(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), -v_x(t, \bar{x}(t)), -v_{xx}(t, \bar{x}(t))) \right\} dt \right]. \end{aligned}$$

Par la définition de l'équation HJB, il vient que

$$-v_t(t, \bar{x}(t)) + G(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), -v_x(t, \bar{x}(t)), -v_{xx}(t, \bar{x}(t))) \leq 0$$

Donc on aura

$$\begin{aligned} G(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), -v_x(t, \bar{x}(t)), -v_{xx}(t, \bar{x}(t))) &= \\ \max_{u \in U} G(t, \bar{x}(t), u, -v_x(t, \bar{x}(t)), -v_{xx}(t, \bar{x}(t))), \end{aligned}$$

si et seulement si

$$-v_t(t, \bar{x}(t)) + G(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), -v_x(t, \bar{x}(t)), -v_{xx}(t, \bar{x}(t))) = 0,$$

c-à-d,  $(\bar{u}(\cdot), \bar{x}(\cdot))$  est la paire optimale. Le théorème est ainsi démontré.  $\square$

Pour énoncer l'équivalent du théorème de vérification dans le cas où la solution de l'équation HJB n'est pas suffisamment dérivable, nous allons introduire les notions suivantes :

**Définition 3.3.7.** Soit  $v \in C([0, T] \times \mathbb{R})$  et  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ . On définit :

a) La surdifférentielle parabolique du second ordre de  $v$  au point  $(t, x)$  par :

$$\begin{aligned} D_{t,x}^{1,2,+} v(t, x) &= \left\{ (q, p, P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \mid \right. \\ &\quad \overline{\lim}_{\substack{s \rightarrow t, s \in [0, T] \\ y \rightarrow x}} \frac{1}{|s - t| + |y - x|^2} [v(s, y) - v(t, x) \\ &\quad \left. - q(s - t) - \langle p, y - x \rangle - \frac{1}{2}(y - x)^\top P(y - x)] \leq 0 \right\}. \end{aligned}$$

b) La sous-différentielle parabolique du second ordre de  $v$  au point  $(t, x)$  par :

$$\begin{aligned} D_{t,x}^{1,2,-} v(t, x) &= \left\{ (q, p, P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \mid \right. \\ &\quad \underline{\lim}_{\substack{s \rightarrow t, s \in [0, T] \\ y \rightarrow x}} \frac{1}{|s - t| + |y - x|^2} [v(s, y) - v(t, x) \\ &\quad \left. - q(s - t) - \langle p, y - x \rangle - \frac{1}{2}(y - x)^\top P(y - x)] \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

**Remarque :** On définit les *sur/sous-différentielle parabolique du second ordre à droite*  $D_{t+,x}^{1,2,+}$  et  $D_{t+,x}^{1,2,-}$ , respectivement, en restreignant  $s \downarrow t$ . De plus,  $D_{t+,x}^{1,2,+}$  et  $D_{t+,x}^{1,2,-}$  sont convexes et on a pour tout  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} D_{t,x}^{1,2,+}v(t, x) \subseteq D_{t+,x}^{1,2,+}v(t, x), \\ D_{t,x}^{1,2,-}v(t, x) \subseteq D_{t+,x}^{1,2,-}v(t, x), \\ D_{t,x}^{1,2,+}(-v)(t, x) = -D_{t,x}^{1,2,-}v(t, x), \\ D_{t+,x}^{1,2,+}(-v)(t, x) = -D_{t+,x}^{1,2,-}v(t, x). \end{cases} \quad (3.30)$$

Les inclusions peuvent être strictes. D'après a) et b) de la définition (3.3.7), on voit que, pour tout  $v \in C([0, T] \times \mathbb{R}^n)$  et  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{cases} D_{t,x}^{1,2,+}v(t, x) + \{0\} \times \{0\} \times S_+^n = D_{t,x}^{1,2,+}v(t, x), \\ D_{t,x}^{1,2,-}v(t, x) - \{0\} \times \{0\} \times S_+^n = D_{t,x}^{1,2,-}v(t, x), \end{cases} \quad (3.31)$$

et pour tout  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{cases} D_{t+,x}^{1,2,+}v(t, x) + [0, \infty) \times \{0\} \times S_+^n = D_{t+,x}^{1,2,+}v(t, x), \\ D_{t+,x}^{1,2,-}v(t, x) - [0, \infty) \times \{0\} \times S_+^n = D_{t+,x}^{1,2,-}v(t, x), \end{cases} \quad (3.32)$$

où  $S_+^n = \{S \in S^n | S \geq 0\}$ .

De plus  $v \in C([0, T] \times \mathbb{R}^n)$  admet des dérivées  $v_t, v_x$  et  $v_{xx}$  en  $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ , si et seulement si

$$D_{t,x}^{1,2,+}v(t_0, x_0) \cap D_{t,x}^{1,2,-}v(t_0, x_0) \neq \emptyset.$$

**Théorème 3.3.8.** (*Théorème de vérification «non classique».*)

On suppose (S1)' et (S2)' satisfaites. Soient  $V$  la fonction valeur,  $(s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$  fixé et  $(\bar{u}(\cdot), \bar{x}(\cdot))$  la paire optimale du problème  $(SC_{xy})$ . Alors pour tout  $(\bar{q}, \bar{p}, \bar{P}) \in L_{\mathcal{F}}^2(s, T; \mathbb{R}^n) \times L_{\mathcal{F}}^2(s, T; \mathbb{R}^n) \times L_{\mathcal{F}}^2(s, T; S^n)$  satisfaisant :

$$(\bar{q}(t), \bar{p}(t), \bar{P}(t)) \in D_{t+,x}^{1,2,-}V(t, \bar{x}(t)), \quad t \in [s, T], \quad P - p.s.,$$

on doit avoir :

$$\mathbb{E}(\bar{q}(t)) \leq \mathbb{E}(G(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), -\bar{p}(t), -\bar{P}(t))), \quad t \in [s, T].$$

La démonstration de ce théorème est disponible dans (Yong et Zhou, 1999).

## CHAPITRE IV

### APPLICATIONS : STRATÉGIE MOYENNE-VARIANCE.

Nous amorçons dans ce chapitre l'application pratique de la théorie que nous venons de reviser. Nous étudions essentiellement le problème de sélection du portefeuille moyenne-variance. En effet, il s'agit pour un investisseur, de trouver la stratégie d'investissement telle que la valeur espérée de sa richesse terminale satisfasse  $\mathbb{E}(X(T)) = d$  pour un  $d$  donné, tout en s'assurant de minimiser le risque représenté par la variance de sa richesse terminale. Nous regardons premièrement, le cas sans contrainte de vente à découvert, c'est-à-dire que notre investisseur est autorisé à vendre des titres sans les détenir. Ensuite, nous explorons celui où cette pratique de «vente à crédit» est interdite, ce sera le cas dit avec contrainte. Les deux cas seront traités en utilisant les deux approches de résolution dont nous avons discuté dans le chapitre précédent, à savoir, le principe du maximum stochastique et la programmation dynamique.

#### 4.1 Formulation du problème.

Dans ce qui suit,  $X'$  désigne la transposée de  $X$ .

Considérons un modèle de marché dans lequel  $m+1$  actifs sont échangés continuellement. L'un d'entre eux, sans risque, qu'on appelle *obligation*, est tel que le processus



de prix  $P_0(t)$  vérifie l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} dP_0(t) = r(t)P_0(t)dt, & t \in [0, T], \\ P_0(0) = p_0 > 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $r(t) > 0$ , est le taux d'intérêt de l'actif sans risque. Il va de soi que  $P_0(t)$  augmentera constamment dans le temps. Les  $m$  autres actifs risqués appelés *actions*, sont tels que les prix  $P_1(t), \dots, P_m(t)$  satisfont l'équation différentielle :

$$\begin{cases} dP_i(t) = P_i(t) \left\{ b_i(t)dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(t)dW^j(t) \right\}, & t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, m. \\ P_i(0) = p_i > 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

où  $b_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b_i(t) > 0$  est appelé le *taux d'appréciation*, et

$\sigma_i(t) = (\sigma_{i1}(t), \dots, \sigma_{im}(t)) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  est la *volatilité* ou encore *dispersion* de la  $i^{\text{ème}}$  action.  $W \equiv (W^1(t), \dots, W^m(t))'$  est un mouvement brownien standard  $m$ -dimensionnel, défini sur un espace de probabilité filtré et complet  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ . Le terme de *diffusion*  $\langle \sigma_i(t), dW(t) \rangle \equiv \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(t)dW^j(t)$  de (4.2) reflète la fluctuation du prix des actions, traduisant ainsi le caractère risqué de ces actifs. Pour intéresser les éventuels acheteurs, il est naturel de supposer :

$$b_i(t) > r(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad 1 \leq i \leq m. \quad (4.3)$$

On définit la matrice de variance

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \sigma_1(t) \\ \vdots \\ \sigma_m(t) \end{pmatrix} \equiv (\sigma_{ij}(t))_{m \times m}.$$

Et on suppose la condition de *non-dégénérescence*, c-à-d qu'il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\sigma(t)\sigma(t)' \geq \delta I, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.4)$$

Considérons maintenant un investisseur détenant  $N_i(t)$  parts de l'actif  $i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) à l'instant  $t$ , et notons par  $X(t)$  sa richesse totale. On a :

$$X(t) = \sum_{i=0}^m N_i(t)P_i(t), \quad t \geq 0. \quad (4.5)$$

Alors, en nous servant de l'équation (2.10), en supposant qu'il n'y pas de frais de transaction sur les actions, c-à-d  $\mu_i(t) = 0 (i = 1, \dots, m)$ , et qu'aucun retrait pour consommation n'est effectué, c-à-d  $c(t) = 0$  pour tout  $t \geq 0$ . La dynamique de la richesse totale de notre investisseur est modélisée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dx(t) = \{r(t)x(t) + \sum_{i=1}^m [b_i(t) - r(t)]u_i(t)\}dt + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \sigma_{ij}(t)u_i(t)dW^j(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (4.6)$$

où  $u_i(t) = N_i(t)P_i(t)$ , est la richesse de l'investisseur sur le  $i^e$  actif. Lorsque  $u_i(t) < 0$ , il/elle est à court du  $i^{\text{ième}}$  actif. Quand  $u_0(t) < 0$ , l'investisseur emprunte le montant  $|u_0(t)|$  au taux d'intérêt  $r(t)$ . Il est clair qu'en changeant  $u_i(t)$ , notre investisseur change l'allocation de sa richesse sur les  $m + 1$  actifs. Le vecteur  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$  est le portefeuille de l'investisseur. Et il faut remarquer que l'allocation faite à l'obligation n'apparaît pas dans le portefeuille, puisque ce dernier est entièrement déterminé par l'allocation effectuée sur les actions, étant donnée la richesse totale.

**Définition 4.1.1.** *La stratégie moyenne-variance est la stratégie d'investissement qui satisfait  $\mathbb{E}(x(T)) = d$ , pour  $d$  donné, tout en s'assurant de minimiser le risque, représenté par la variance de  $x(T)$ .*

*Le problème d'optimisation correspondant se formule de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} \min \text{Var } x(T) &\equiv \mathbb{E}[x(T) - d]^2 \\ \text{sous } \begin{cases} \mathbb{E}(x(T)) = d, \\ u(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}_+^m), \\ (X(\cdot), u(\cdot)) \text{ satisfait (4.6)}. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.7)$$

*Le contrôle optimal de (4.7) est appelé stratégie efficiente, la paire  $(\text{Var}(x(T)), d)$ , où  $\text{Var}(x(T))$  est la valeur optimale de (4.7) est le point efficient, et l'ensemble de tous les points efficients lorsque  $d$  parcourt  $[x_0 e^{\int_0^T r(s)ds}, +\infty)$  ( $x_0 e^{\int_0^T r(s)ds}$  correspond au gain réalisé si toute la richesse initiale était placée dans les obligations) est la frontière efficiente.*

Avant d'entamer la résolution de notre problème, rappelons deux principaux résultats utiles de l'analyse convexe.

**Lemme 4.1.2.** Soit  $s$  une fonction continue, strictement convexe et quadratique définie par

$$s(z) = \| (\mathcal{D}')^{-1}z + (\mathcal{D}')^{-1}\mathcal{B}' \|^2, \quad z \in [0, \infty)^m, \quad (4.8)$$

où  $\mathcal{B}' \in \mathbb{R}_+^m$ ,  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , et  $\mathcal{D}'\mathcal{D} > 0$ .

Alors  $s$  admet un unique minimum  $\bar{z} \in [0, \infty)^m$ , c-à-d,

$$\| (\mathcal{D}')^{-1}\bar{z} + (\mathcal{D}')^{-1}\mathcal{B}' \|^2 \leq \| (\mathcal{D}')^{-1}z + (\mathcal{D}')^{-1}\mathcal{B}' \|^2, \quad \forall z \in [0, \infty)^m.$$

**Lemme 4.1.3.** Soit  $h$  une fonction continue, strictement convexe et quadratique définie par

$$h(z) = \frac{1}{2}z'\mathcal{D}'\mathcal{D}z - \alpha\mathcal{B}z, \quad z \in [0, \infty)^m, \quad (4.9)$$

où  $\mathcal{B}' \in \mathbb{R}_+^m$ ,  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , et  $\mathcal{D}'\mathcal{D} > 0$ .

(i) pour tout  $\alpha \geq 0$ ,  $h$  admet un unique minimum  $\alpha\mathcal{D}^{-1}\bar{\xi} \in [0, \infty)^m$ ,

où  $\bar{\xi} = (\mathcal{D}')^{-1}\bar{z} + (\mathcal{D}')^{-1}\mathcal{B}'$ .  $\bar{z}$  étant le minimum de  $s(z)$  du lemme (4.1.2), de plus

$\bar{z}\mathcal{D}^{-1}\bar{\xi} = 0$  et

$$h(\alpha\bar{\nu}) = h(\alpha\mathcal{D}^{-1}\bar{\xi}) = -\frac{1}{2}\alpha^2 \|\bar{\xi}\|^2,$$

avec  $\bar{\nu} = (\mathcal{D}'\mathcal{D})^{-1}\bar{z} + (\mathcal{D}'\mathcal{D})^{-1}\mathcal{B}'$ .

(ii) Pour tout  $\alpha < 0$ ,  $h$  admet un minimum unique qui est 0.

La preuve des lemmes 4.1.2 et 4.1.3 est donnée dans la section 5.2 de Xu et Shreve (1992).

## 4.2 Résolution par le principe du maximum stochastique

### 4.2.1 Problème sans contrainte.

Pour plus de commodité dans les calculs, nous nous plaçons dans le cas où  $m = 1$ , et  $b, \sigma$  et  $r$  sont des constantes positives. Posons

$$\theta = \sigma^{-1}(b - r),$$

$\theta$  est le *coefficient de risque relatif*. Nous supposons qu'il n'y a pas d'interdiction de vente à découvert, c-à-d  $u(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R})$ . Plus précisément, on a  $U \subseteq \mathbb{R}$ .

Minimiser  $\text{Var } x(T) = \mathbb{E}[x(T) - \mathbb{E}(T)]^2$ , sous  $\mathbb{E}(T) = d$ , revient à minimiser  $\mathbb{E}[x(T)^2]$ . Étant donnée la contrainte  $\mathbb{E}(x(T)) = d$ , nous allons faire appel à la méthode du multiplicateur de Lagrange. En introduisant le multiplicateur  $\lambda_T \in \mathbb{R}$  (puisque la contrainte dépend de  $T$ ), notre problème se ramène donc à minimiser :

$$\mathbb{E}\left\{x(T)^2 + \lambda_T[x(T) - d]\right\}, \quad (4.10)$$

équivalent à minimiser :

$$\mathbb{E}\left[\left(x(T) + \frac{\lambda_T}{2}\right)^2\right], \quad (4.11)$$

l'équation d'état associée étant

$$\begin{cases} dx(t) = [rx(t) + (b-r)u(t)]dt + \sigma u(t)dW(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Nous savons d'après la remarque qui suit le théorème 3.1.1 que pour  $U \subseteq \mathbb{R}$  convexe et compact, le contrôle optimal existe car les fonctions  $f \equiv 0$  et  $h : x \rightarrow (x + \frac{\lambda_T}{2})^2$  sont convexes. Soit  $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$  une paire optimale, les équations adjointes du premier et second ordre associées au problème sont respectivement :

$$\begin{cases} dp(t) = -rp(t)dt + q(t)dW(t) \\ p(T) = -2(\bar{x}(T) + \frac{\lambda_T}{2}), \end{cases} \quad (4.13)$$

et

$$\begin{cases} dP(t) = -2rP(t)dt + Q(t)dW(t) \\ P(T) = -2. \end{cases} \quad (4.14)$$

La résolution de l'EDSR (4.14) est immédiate et donne la solution

$$(P(t), Q(t)) = (-2e^{2r(T-t)}, 0).$$

Quant à (4.13), nous allons chercher  $p(t)$  de la forme

$$p(t) = \Psi(t)\bar{x}(t) + \Phi(t)\lambda_T, \quad \text{avec } \Psi(T) = -2, \quad \Phi(T) = 1,$$

où  $\Psi(t)$  et  $\Phi(t)$  sont des fonctions déterministes. On a ainsi :

$$dp(t) = \left\{ \dot{\Psi}(t)\bar{x}(t) + [r\bar{x}(t) + (b-r)\bar{u}(t)]\Psi(t) + \dot{\Phi}(t)\lambda_T \right\} dt + \sigma\Psi(t)\bar{u}(t)dW(t) \quad (4.15)$$

Avant de continuer, notons que la fonction  $\mathcal{H}$  (telle que définie par 3.12) correspondante au problème est donnée par

$$\mathcal{H}(t, \bar{x}, u) = \frac{1}{2}\sigma^2 P(t)u^2 + [p(t)(b-r) + \sigma q(t) - \sigma^2 P(t)\bar{u}]u + r\bar{x}p(t) \quad (4.16)$$

$\mathcal{H}(t, \bar{x}, u)$  est visiblement quadratique en  $u$ , et d'après le théorème 3.2.1, une condition nécessaire pour que  $\bar{u}(\cdot)$  soit le contrôle optimal est que la dérivée de  $\mathcal{H}$  en  $\bar{u}$  s'annule, c'est-à-dire

$$p(t)(b-r) + \sigma q(t) = 0,$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} q(t) &= -\frac{(b-r)}{\sigma}p(t) \\ &= -\theta p(t). \end{aligned}$$

Il va de soi que cette dernière relation entre  $p(t)$  et  $q(t)$  permet de voir l'EDSR (4.13) comme une simple EDS (bien sûr en inversant le temps).

En identifiant les écritures de  $dp(t)$  dans (4.15) et (4.13), on obtient

$$\begin{cases} \dot{\Psi}(t)\bar{x}(t) + [r\bar{x}(t) + (b-r)\bar{u}(t)]\Psi(t) + \dot{\Phi}(t)\lambda_T = -rp(t) \\ \sigma\Psi(t)\bar{u}(t) = q(t), \end{cases} \quad (4.17)$$

De cette deuxième égalité de (4.17), on écrit

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) &= -\frac{1}{\sigma\Psi(t)}q(t) \\ &= -\frac{-\theta}{\sigma\Psi(t)}p(t) \\ &= -\frac{-\theta}{\sigma\Psi(t)}\left[\Psi(t)\bar{x}(t) + \Phi(t)\lambda_T\right] \\ &= -\frac{-\theta}{\sigma}\left[\bar{x}(t) + \frac{\Phi(t)}{\Psi(t)}\lambda_T\right], \end{aligned}$$

et en remplaçant  $\bar{u}(t)$  par sa valeur ci-dessus dans la première égalité de (4.17), on obtient

$$\dot{\Psi}(t)\bar{x}(t) + \left\{ r\bar{x}(t) + \frac{-\theta}{\sigma}(b-r)\left[\bar{x}(t) + \frac{\Phi(t)}{\Psi(t)}\lambda_T\right] \right\} \Psi(t) + \dot{\Phi}(t)\lambda_T = -rp(t),$$

qui s'écrit encore

$$\left[ \dot{\Psi}(t) - \theta^2\Psi(t) + r\Psi(t) \right] \bar{x}(t) + \left[ \dot{\Phi}(t) - \theta^2\Phi(t) \right] \lambda_T = -r\Psi(t)\bar{x}(t) - r\Phi(t)\lambda_T.$$

Nous allons donc choisir  $\Psi(t)$  et  $\Phi(t)$  de manière à satisfaire les équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\Psi}(t) - \theta^2\Psi(t) + 2r\Psi(t) = 0 \\ \Psi(T) = -2, \end{cases} \quad (4.18)$$

et

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t) - \theta^2\Phi(t) + r\Phi(t) = 0 \\ \Phi(T) = 1. \end{cases} \quad (4.19)$$

La résolution des EDOs (4.18) et (4.19) est directe et fournit les solutions

$$\Psi(t) = -2e^{(2r-\theta^2)(T-t)} \quad \text{et} \quad \Phi(t) = e^{(r-\theta^2)(T-t)}.$$

Remarquons que  $\Psi(t) < 0$ , pour tout  $t \in [0, T]$ , par conséquent les manipulations algébriques effectuées plus haut sont tout à fait justifiées. Notre candidat pour le contrôle optimal est donc

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) &= -\frac{1}{\sigma\Psi(t)}q(t) \\ &= -\frac{\theta}{\sigma}\bar{x} - \frac{\lambda_T}{2}e^{-r(T-t)}. \end{aligned}$$

Pour montrer que  $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$  est une paire optimale, nous utilisons essentiellement le théorème 3.2.4 sur la suffisance du principe du maximum stochastique. Il est clair que par sa construction,  $\bar{u}(\cdot)$  maximise la fonction  $\mathcal{H} : u \rightarrow \mathcal{H}(t, \bar{x}, u)$ , manifestement concave. D'autre part,  $h(x) = \left(x + \frac{\lambda_T}{2}\right)^2$  est convexe et de plus, on a l'hamiltonien

$$H(t, x(t), u(t), p(t), q(t)) = p(t)[rx(t) + (b-r)u(t)] + \sigma q(t)u(t)$$

qui est concave.

### 4.2.2 Problème avec contrainte.

Rappelons d'abord que :

- $X'$  désigne la transposée de  $X$
- $X^+ = \max(X, 0)$ ,  $X^- = -\min(X, 0)$
- $L^p_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^n)$  désigne l'ensemble des processus  $\mathcal{F}_{t \geq 0}$ -adaptés  $X(\cdot)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  tels que  $\mathbb{E}(\int_0^T |X|^p) < \infty$  ( $p \in [1, \infty)$ ).
- $L^\infty_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^n)$  désigne l'ensemble des processus  $\mathcal{F}_{t \geq 0}$ -adaptés à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  essentiellement bornés.

Nous examinons maintenant le cas où la vente à découvert est prohibée, en d'autres termes  $u(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^m_+)$ . Nous considérons cette fois le cas  $m$ -dimensionnel;  $b, \sigma$  et  $r$  pouvant être des matrices déterministes de dimensions convenablement choisies. Cependant, la variable d'état  $x$  est prise unidimensionnelle.

Rappelons que l'équation qui modélise l'évolution de la richesse totale est

$$\begin{cases} dx(t) = \{r(t)x(t) + \sum_{i=1}^m [b_i(t) - r(t)]u_i(t)\}dt + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \sigma_{ij}(t)u_i(t)dW^j(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (4.20)$$

Elle est linéaire en  $u$  et  $x$ . La fonction de coût que nous désirons minimiser est

$$\mathbb{E}\left[\left(x(T) + \frac{\lambda_T}{2}\right)^2\right]. \quad (4.21)$$

Nous reconnaissons là un problème linéaire quadratique (LQ); linéaire parce que l'équation d'état est linéaire en  $u$  et  $x$ , et quadratique parce que la fonction de coût est une fonction quadratique des mêmes variables. Les problèmes LQ constituent une classe importante de problèmes de contrôle optimal. Car, non seulement ils modélisent beaucoup de problèmes dans des cas pratiques, mais aussi les problèmes non linéaires peuvent être raisonnablement approximatés ces derniers. Nous allons donc rapidement présenter une méthode de résolution générale des problèmes LQ avant de revenir à notre problème moyenne-variance.

### Problème LQ général avec contrainte.

À cause de la contrainte sur  $u$  (qui en fait entraîne une contrainte sur  $x$ ), la démarche effectuée au paragraphe précédent ne s'avère plus appropriée. Nous adoptons cependant une autre approche similaire, mais légèrement différente. On considère l'EDS linéaire suivante :

$$\begin{cases} dx(t) = [A(t)x(t) + B(t)u(t)]dt + [x(t)C(t)' + u(t)'D(t)']dW(t), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (4.22)$$

où  $A, B, C$  et  $D$  sont des processus  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -adapté (possiblement à valeurs matricielles), et  $x_0 \in \mathbb{R}$  est un scalaire. Soit  $\Gamma$  un cône fermé, c-à-d,  $\Gamma$  est fermé, et si  $u \in \Gamma$ , alors  $\alpha u \in \Gamma, \forall \alpha \geq 0$ . L'ensemble des contrôles admissibles est

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{ad} := \{u(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^m) \mid u(t) \in \Gamma, \text{ P-p.s., } t \in [0, T] \text{ et (4.22)} \\ \text{admet une unique solution sous } u(\cdot)\} \end{aligned}$$

On suppose que la fonction de coût est donnée par

$$J(x_0, u(\cdot)) := \mathbb{E} \left\{ \int_0^T [Q(t)x(t)^2 + u(t)'R(t)u(t)]dt + Gx(T)^2 \right\} \quad (4.23)$$

Émettons l'hypothèse suivante :

**Hypothèse (A1) :**

$$\begin{cases} A, Q \in L^\infty_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}), & B \in L^\infty_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^{1 \times m}), & C \in L^\infty_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^k), \\ D \in L^\infty_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^{k \times m}), & R \in L^\infty_{\mathcal{F}}(0, T; S^m), & G \in L^\infty_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R}). \end{cases}$$

Le problème LQ stochastique associé à (4.22)-(4.23) est de

$$\begin{cases} \text{minimiser } J(x_0, u(\cdot)), \\ \text{sous } u(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}. \end{cases}$$



Maintenant, définissons les fonctions

$$\begin{aligned} H_+(t, \omega, v, P, \Lambda) &:= v'[R(t, \omega) + PD(t, \omega)'D(t, \omega)]v \\ &\quad + 2v'[B(t, \omega)'P + D(t, \omega)'PC(t, \omega) + D(t, \omega)'\Lambda], \\ H_-(t, \omega, v, P, \Lambda) &:= v'[R(t, \omega) + PD(t, \omega)'D(t, \omega)]v \\ &\quad - 2v'[B(t, \omega)'P + D(t, \omega)'PC(t, \omega) + D(t, \omega)'\Lambda], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H_+^*(t, \omega, P, \Lambda) &:= \inf_{v \in \Gamma} H_+(t, \omega, v, P, \Lambda), \\ H_-^*(t, \omega, P, \Lambda) &:= \inf_{v \in \Gamma} H_-(t, \omega, v, P, \Lambda), \end{aligned}$$

pour  $(t, \omega, v, P, \Lambda) \in [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ .

Enfin, un peu comme les équations adjointes dans le cas sans contrainte, considérons les deux EDSRs non linéaires suivantes (on masque les arguments  $t$  et  $\omega$ ) :

$$\begin{cases} dP_+ = - \{ (2A + C'C)P_+ + 2C'\Lambda_+ + Q + H_+^*(P_+, \Lambda_+) \} dt + \Lambda_+' dW, & t \in [0, T], \\ P_+(T) = G, \\ R + P_+ D' D > 0, \end{cases} \quad (4.24)$$

$$\begin{cases} dP_- = - \{ (2A + C'C)P_- + 2C'\Lambda_- + Q + H_-^*(P_-, \Lambda_-) \} dt + \Lambda_-' dW, & t \in [0, T], \\ P_-(T) = G, \\ R + P_- D' D > 0. \end{cases} \quad (4.25)$$

Notons que lorsqu'il n'y a pas de contraintes, c-à-d  $\Gamma = \mathbb{R}^m$ ,

$$H_+^*(t, P, \Lambda) = H_-^*(t, P, \Lambda) = -[PB + (C'P + \Lambda')D](R + PD'D)^{-1}[B'P + D'(PC + \Lambda)].$$

Nous énonçons le théorème d'existence de solutions des EDSRs (4.24) et (4.25).

**Théorème 4.2.1.** *Nous avons deux cas :*

- (i) Cas standard : si  $Q \geq 0, R > 0$ , avec  $R^{-1} \in L^\infty_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^{m \times m})$ , et  $G \geq 0$ , alors il existe une solution bornée non négative  $(P_+, \Lambda_+)$  resp.  $(P_-, \Lambda_-)$  de l'EDSR (4.24) resp. (4.25).
- (ii) Cas singulier : si  $Q \geq 0, R \geq 0, G > 0$ , avec  $G^{-1} \in L^\infty_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R})$ , et  $D'D > 0$ , avec  $D'D \in L^\infty_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^{m \times m})$  alors il existe une solution bornée uniformément positive  $(P_+, \Lambda_+)$  (resp.  $(P_-, \Lambda_-)$ ) de l'EDSR (4.24) (resp. (4.25)).

*Démonstration.* Voir (Hu et Zhou, 2005) □

Avant de donner la forme explicite de la solution du problème LQ (4.22)-(4.23), on définit lorsque  $R + PD'D > 0$ ,

$$\begin{aligned}\xi_+(t, \omega, P, \Lambda) &:= \operatorname{argmin}_{v \in \Gamma} H_+(t, \omega, v, P, \Lambda), \\ \xi_-(t, \omega, P, \Lambda) &:= \operatorname{argmin}_{v \in \Gamma} H_-(t, \omega, v, P, \Lambda),\end{aligned}$$

avec  $(t, \omega, P, \Lambda) \in [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ .

**Théorème 4.2.2.** *Soient  $(P_+, \Lambda_+) \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega; C(0, T; \mathbb{R})) \times L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^k)$  et  $(P_-, \Lambda_-) \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega; C(0, T; \mathbb{R})) \times L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^k)$  les solutions respectives de (4.24) et (4.25) (cas standard et singulier). Alors*

$$\bar{u}(t) = \xi_+(t, P_+(t), \Lambda_+(t))x^+(t) + \xi_-(t, P_-(t), \Lambda_-(t))x^-(t),$$

*est optimal pour le problème (4.22)-(4.23). De plus, le coût optimal est dans ce cas*

$$\bar{J}(x_0) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}} J(x_0, u(\cdot)) = P_+(0)(x_0^+)^2 + P_-(0)(x_0^-)^2.$$

*Démonstration.* Voir (Hu et Zhou, 2005) □

Revenons maintenant à notre problème moyenne-variance (4.20)-(4.21) dont la fonction de coût associée est

$$\mathbb{E}\left[\left(x(T) + \frac{\lambda_T}{2}\right)^2\right].$$

Reconnaissons que notre fonction de coût n'a pas une forme exacte souhaitée. Pour avoir une forme exacte du problème LQ stochastique général, cherchons le changement de variable adéquat

$$y = x + \lambda_T \beta(t),$$

tel que

$$\begin{cases} \left(x(T) + \frac{\lambda_T}{2}\right)^2 = y(T)^2 + \text{cte}, \text{ et} \\ \text{l'équation (4.20) en } y \text{ doit garder la forme générale des problèmes LQ général,} \end{cases}$$

ce qui conduit à résolution de

$$\begin{cases} \dot{\beta}(s) = r(s)\beta(s), \\ \left(x(T) + \frac{\lambda_T}{2}\right)^2 = y(T)^2 + \text{cte}. \end{cases}$$

Des calculs simples donnent

$$\beta(t) = \frac{1}{2} e^{-\int_t^T r(s) ds}, \quad \text{cte} = 0.$$

Donc, en effectuant le changement de variable

$$y = x + \frac{\lambda_T}{2} e^{-\int_t^T r(s) ds},$$

la fonction de coût à minimiser devient

$$\mathbb{E}\left[y(T)^2\right],$$

et l'équation d'état associée

$$\begin{cases} dy(t) = \{r(t)y(t) + \sum_{i=1}^m [b_i(t) - r(t)]u_i(t)\}dt + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \sigma_{ij}(t)u_i(t)dW^j(t), \\ y(0) = x_0 + \frac{\lambda_T}{2} e^{-\int_0^T r(s) ds} \end{cases} \quad (4.26)$$

a exactement la même forme que (4.22), avec :

$$\begin{cases} A(t) = r(t), & Q(t) = R(t) = C(t) \equiv 0, \\ D(t) = \sigma(t)', & B(t) = (b_1(t) - r(t), \dots, b_m(t) - r(t)), \\ G(t) = 1. \end{cases}$$

Il s'agit donc d'un cas singulier avec  $\Gamma = \mathbb{R}_+^m$ . Nos coefficients étant déterministes,  $\Lambda = 0$ , et on a les fonctions

$$\begin{aligned} H_+(t, v, P) &:= 2 \left[ \frac{1}{2} v' \sigma(t)' \sigma(t) v + v' B(t)' \right] P, \\ H_-(t, v, P) &:= 2 \left[ \frac{1}{2} v' \sigma(t)' \sigma(t) v - v' B(t)' \right] P, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H_+^*(t, P) &:= \inf_{v \in \Gamma} H_+(t, v, P), \\ H_-^*(t, P) &:= \inf_{v \in \Gamma} H_-(t, v, P), \end{aligned}$$

Le lemme 4.1.3 nous dit que  $H_+^*$  et  $H_-^*$  sont bien définies. Mieux,  $H_+^*(t, P) \equiv 0$ . Donc, les EDSRs (4.24) et (4.25) dans ce cas sont

$$\begin{cases} dP_+ = -[2r(t)P_+ + H_+^*(t, P_+)]dt, & t \in [0, T], \\ P_+(T) = 1, \\ P_+(t) > 0, \end{cases} \quad (4.27)$$

$$\begin{cases} dP_- = -2r(t)P_-(t)dt, & t \in [0, T], \\ P_-(T) = 1, \\ P_-(t) > 0, \end{cases} \quad (4.28)$$

et on a

$$\begin{aligned} \xi_+(t, P) &:= \operatorname{argmin}_{v \in \Gamma} H_+(t, v, P) \equiv 0, \\ \xi_-(t, P) &:= \operatorname{argmin}_{v \in \Gamma} H_-(t, v, P), \end{aligned}$$

**Théorème 4.2.3.** Soient  $P_+ \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega; C(0, T; \mathbb{R}))$  et  $P_- \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega; C(0, T; \mathbb{R}))$  les solutions respectives de (4.27) et (4.28). Alors,

$$\begin{aligned}\bar{u}(t) &= \xi_-(t, P_-(t))y^-(t), \\ &= \begin{cases} -\xi_-(t, P_-(t)) \left[ x + \frac{\lambda_T}{2} e^{-\int_t^T r(s)ds} \right] & \text{si } x + \frac{\lambda_T}{2} e^{-\int_t^T r(s)ds} \leq 0; \\ 0, & \text{si } x + \frac{\lambda_T}{2} e^{-\int_t^T r(s)ds} > 0. \end{cases}\end{aligned}$$

est optimal pour le problème (4.20)-(4.21). De plus, le coût optimal est dans ce cas

$$\begin{aligned}\bar{J}(x_0) &= \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}} J(x_0, u(\cdot)) \\ &= P_+(0) \left[ \left( x_0 + \frac{\lambda_T}{2} e^{-\int_0^T r(s)ds} \right)^+ \right]^2 + P_-(0) \left[ \left( x_0 + \frac{\lambda_T}{2} e^{-\int_0^T r(s)ds} \right)^- \right]^2.\end{aligned}$$

*Démonstration.* Le résultat découle directement du théorème 4.2.2 □

### 4.3 Resolution par la programmation dynamique.

#### 4.3.1 Problème sans contrainte.

Pour commencer avec cette approche, nous allons comme précédemment considérer le cas  $m = 1$ , avec  $b, \sigma$  et  $r$  des constantes positives. Nous supposons qu'il n'y a pas d'interdiction de vente à découvert. Rappelons que le problème du contrôle optimal dans ce cas est de trouver  $\bar{u}(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R})$  tel que :

$$J(s, y, \bar{u}(\cdot)) = \inf_{u \in U} J(s, y, u(\cdot)) \quad (4.29)$$

$$\equiv \inf_{u \in U} \mathbb{E} \left[ \left( x(T) + \frac{\lambda_T}{2} \right)^2 \right], \quad (4.30)$$

l'équation d'état associée étant

$$\begin{cases} dx(t) = \left[ rx(t) + (b - r)u(t) \right] dt + \sigma u(t) dW(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (4.31)$$

Soit  $V$  la fonction valeur du problème (4.29), on sait que

$$V(s, y) = \inf_{u \in U} J(s, y, u(\cdot)).$$

L'équation HJB correspondante à notre problème est

$$\begin{cases} v_t(t, x(t)) + \inf_{u(\cdot) \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2} \sigma^2 u(t)^2 v_{xx}(t, x(t)) + v_x(t, x(t)) [rx(t) + (b-r)u(t)] \right\} = 0 \\ v(T, x) = \left( x + \frac{\lambda_T}{2} \right)^2. \end{cases} \quad (4.32)$$

Nous allons déterminer une solution de (4.32) de la forme

$$v(t, x) = \left[ \varphi(t)x + \gamma(t) \frac{\lambda_T}{2} \right], \quad \varphi(T) = 1, \quad \gamma(T) = 1.$$

Les dérivées partielles de  $v(t, x)$  donnent les égalités

$$\begin{cases} v_t(t, x(t)) = 2 \left[ \varphi'(t)x + \gamma'(t) \frac{\lambda_T}{2} \right] \left[ \varphi(t)x + \gamma(t) \frac{\lambda_T}{2} \right], \\ v_x(t, x(t)) = 2\varphi(t) \left[ \varphi(t)x + \gamma(t) \frac{\lambda_T}{2} \right], \\ v_{xx}(t, x(t)) = 2\varphi(t)^2. \end{cases} \quad (4.33)$$

Le polynôme suivant, provenant de (4.32) et qui est du second degré en  $u(t)$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 u(t)^2 v_{xx}(t, x(t)) + v_x(t, x(t))(b-r)u(t) + v_x(t, x(t))rx(t), \quad (4.34)$$

atteint son minimum en

$$\bar{u}(t) = \frac{(r-b)v_x}{\sigma^2 v_{xx}}. \quad (4.35)$$

L'équation (4.32) devient donc

$$\begin{cases} v_t(t, x(t)) + \frac{1}{2} \sigma^2 \bar{u}(t)^2 v_{xx}(t, x(t)) + v_x(t, x(t)) [rx(t) + (b-r)\bar{u}(t)] = 0 \\ v(T, x) = \left( x + \frac{\lambda_T}{2} \right)^2. \end{cases} \quad (4.36)$$

En remplaçant  $\bar{u}$ ,  $v_t$ ,  $v_x$  et  $v_{xx}$  par leurs valeurs respectives de (4.33) dans (4.36), et en simplifiant, on aboutit à l'expression suivante

$$\left[ \varphi'(t) - \frac{\theta^2}{2} \varphi(t) + r\varphi(t) \right] x(t) + \left[ \gamma'(t) - \frac{\theta^2}{2} \gamma(t) \right] = 0, \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.37)$$

Nous allons donc choisir  $\varphi$  et  $\gamma$  de manière à satisfaire les deux équations différentielles ordinaires (EDOs) :

$$\begin{cases} \varphi'(t) - \frac{\theta^2}{2} \varphi(t) + r\varphi(t) = 0 \\ \varphi(T) = 1, \end{cases} \quad (4.38)$$

et

$$\begin{cases} \gamma'(t) - \frac{\theta^2}{2}\gamma(t) = 0 \\ \gamma(T) = 1. \end{cases} \quad (4.39)$$

On trouve aisément les solutions de (4.38) et (4.39) suivantes

$$\varphi(t) = e^{(r-\frac{\theta^2}{2})(T-t)} \quad \text{et} \quad \gamma(t) = e^{-\frac{\theta^2}{2}(T-t)}.$$

Ainsi, on obtient

$$v(t, x) = \left[ e^{(r-\frac{\theta^2}{2})(T-t)}x + \frac{\lambda_T}{2}e^{-\frac{\theta^2}{2}(T-t)} \right]^2,$$

qui est solution de (4.32) par construction. Elle est suffisamment lisse, c'est-à-dire que  $v(t, x) \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ . L'égalité (4.35) devient donc

$$\bar{u}(t) = -\frac{\theta}{\sigma}\bar{x} - \frac{\lambda_T}{2}e^{-r(T-t)}, \quad (4.40)$$

c'est la *stratégie efficiente* par application du théorème de vérification. L'on doit remarquer ici que nous avons obtenu le même résultat qu'avec l'approche du principe du maximum stochastique.

Mais, que vaut le  $\lambda_T$  qui apparaît dans l'expression ci-dessus ? Pour répondre à cette question, considérons la stratégie optimale, et écrivons de nouveau l'équation qui modélise la richesse totale dans ce cas :

$$\begin{cases} dx(t) = \left[ (r - \theta^2)x(t) + (b - r)\frac{\lambda_T}{2}e^{-r(T-t)} \right] dt + \sigma\left(-\frac{\theta}{\sigma}x + \frac{\lambda_T}{2}e^{-r(T-t)}\right)dW(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (4.41)$$

En passant à l'espérance, on arrive à

$$\begin{cases} d\mathbb{E}(x(t)) = \left[ (r - \theta^2)\mathbb{E}(x(t)) + (b - r)\frac{\lambda_T}{2}e^{-r(T-t)} \right] dt, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (4.42)$$

Et en résolvant (4.42), on aboutit à l'expression explicite de  $\mathbb{E}(x(T))$  en fonction de  $\lambda_T$  :

$$\mathbb{E}(x(T)) = x_0e^{(r-\theta^2)T} + \frac{\lambda_T}{2}[1 - e^{-\theta^2T}].$$

Sachant que  $\mathbb{E}(x(T)) = d$ , on trouve que le choix de  $\lambda_T$  doit être

$$\lambda_T^* = \frac{2}{e^{-\theta^2T} - 1} \left[ d - x_0e^{(r-\theta^2)T} \right].$$

### 4.3.2 Problème avec contrainte.

Nous regardons maintenant le cas où il existe la contrainte d'interdiction de la vente à découvert. Sachant que notre problème d'optimisation est du type LQ, nous donnons d'abord une résolution plus générale des problèmes LQ par l'approche de la programmation dynamique.

#### Problème LQ stochastique général avec contrainte.

Considérons l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dx(t) = \{A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t)\}dt + \sum_{j=1}^m D_j(t)u(t)dW^j(t), & t \in [s, T] \\ x(s) = y, \end{cases} \quad (4.43)$$

où  $A(t)$  et  $f(t) \in \mathbb{R}$  sont des scalaires.  $B(t)' \in \mathbb{R}_+^m$  et  $D_j(t)' \in \mathbb{R}^m$  ( $j = 1, \dots, m$ ) sont des vecteurs colonnes. De plus, on suppose que la matrice  $\sum_{j=1}^m D_j(t)'D_j(t)$  est non singulière. La classe des contrôles  $u(\cdot)$  qui sont admissibles est  $\mathcal{U}[s, T] = L^2_{\mathcal{F}}(s, T; \mathbb{R}_+^m)$ .

Notre objectif est de trouver le  $u(\cdot)$  optimal, qui minimise

$$J(s, y, u(\cdot)) = \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{2} x(T)^2 \right\} \quad (4.44)$$

La fonction valeur associée au problème LQ (4.43)-(4.44) est définie par :

$$V(s, y) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}[s, T]} J(s, y, u(\cdot))$$

L'équation HJB correspondante au problème est

$$\begin{cases} v_t(t, x(t)) + \inf_{u \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} v_{xx}(t, x(t)) u' D_j(t)' D_j(t) u \right. \\ \quad \left. + v_x(t, x(t)) [A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t)] \right\} = 0 \\ v(T, x) = \frac{1}{2} x^2. \end{cases} \quad (4.45)$$

Contrairement au cas sans contrainte que nous venons d'étudier, la contrainte de non-négativité sur le contrôle fait que l'équation de HJB n'admet malheureusement pas de



solutions régulières. Nous ferons donc appel à la notion de solutions de viscosité.

En référence aux lemmes 4.1.2 et 4.1.3, posons

$$\bar{z} := \arg \min_{z(t) \in [0, \infty)^m} \| (D(t)')^{-1} z(t) + (D(t)')^{-1} B(t)' \|^2, \quad (4.46)$$

et

$$\bar{\xi} := (D(t)')^{-1} \bar{z}(t) + (D(t)')^{-1} B(t)' \quad (4.47)$$

Soient  $\bar{P}(t)$ ,  $\bar{g}(t)$  et  $\bar{c}(t)$ , les solutions respectives des équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} \dot{\bar{P}}(t) = [-2A(t) + \|\bar{\xi}\|^2] \bar{P}(t), \\ \bar{P}(T) = 1, \\ \bar{P}(t) > 0, \quad \forall t \in [0, T], \end{cases} \quad (4.48)$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{g}}(t) = [-A(t) + \|\bar{\xi}\|^2] \bar{g}(t) - f(t) \bar{P}(t), \\ \bar{g}(T) = 0, \end{cases} \quad (4.49)$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{c}}(t) = -f(t) \bar{g}(t) + \|\bar{\xi}\|^2 \bar{P}(t)^{-1} \bar{g}(t)^2, \\ \bar{c}(T) = 0, \end{cases} \quad (4.50)$$

et soient  $\tilde{P}(t)$ ,  $\tilde{g}(t)$  et  $\tilde{c}(t)$ , les solutions respectives des équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} \dot{\tilde{P}}(t) = -2A(t) \tilde{P}(t), \\ \tilde{P}(T) = 1, \\ \tilde{P}(t) > 0, \quad \forall t \in [0, T], \end{cases} \quad (4.51)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{g}}(t) = -A(t) \tilde{g}(t) - f(t) \tilde{P}(t), \\ \tilde{g}(T) = 0, \end{cases} \quad (4.52)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{c}}(t) = -f(t) \tilde{g}(t), \\ \tilde{c}(T) = 0. \end{cases} \quad (4.53)$$

**Proposition 4.3.1.** *La fonction définie par*

$$V(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \bar{P}(t)x^2 + \bar{g}(t)x + \bar{c}(t), & \text{si } x + e^{-\int_t^T A(s)ds} \int_t^T f(z)e^{\int_z^T A(s)ds} dz \leq 0; \\ \frac{1}{2} \tilde{P}(t)x^2 + \tilde{g}(t)x + \tilde{c}(t), & \text{si } x + e^{-\int_t^T A(s)ds} \int_t^T f(z)e^{\int_z^T A(s)ds} dz > 0 \end{cases} \quad (4.54)$$

*est une solution de viscosité de l'équation (4.45), et*

$$\bar{u}(t, x) = \begin{cases} -D(t)^{-1} \bar{\xi}(t) \left( x + e^{-\int_t^T A(s)ds} \int_t^T f(z)e^{\int_z^T A(s)ds} dz \right), & \text{si } x + e^{-\int_t^T A(s)ds} \int_t^T f(z)e^{\int_z^T A(s)ds} dz \leq 0; \\ 0, & \text{si } x + e^{-\int_t^T A(s)ds} \int_t^T f(z)e^{\int_z^T A(s)ds} dz > 0 \end{cases} \quad (4.55)$$

*est le contrôle optimal associé.*

*Démonstration.* Nous montrerons premièrement que  $V$  définie en (4.54) est une solution de viscosité de l'équation HJB (4.45). Il est évident de voir que

$$\bar{P}(t) = e^{\int_t^T (2A(s) - \|\bar{\xi}(s)\|^2) ds}$$

est une solution de (4.48). Pour résoudre (4.49), définissons

$$\bar{\eta}(t) := \frac{\bar{g}(t)}{\bar{P}(t)}.$$

Alors d'après (4.48) et (4.49)

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\eta}}(t) &= \frac{\bar{P}(t)\dot{\bar{g}}(t) - \dot{\bar{P}}(t)\bar{g}(t)}{\bar{P}(t)^2} \\ &= \frac{\bar{P}(t) \{ [-A(t) + \|\bar{\xi}\|^2] \bar{g}(t) - f(t)\bar{P}(t) \} - \{ [-2A(t) + \|\bar{\xi}\|^2] \bar{P}(t) \} \bar{g}(t)}{\bar{P}(t)^2} \\ &= \frac{A(t)\bar{P}(t)\bar{g}(t) - f(t)\bar{P}(t)^2}{\bar{P}(t)^2} \\ &= A(t)\bar{\eta}(t) - f(t). \end{aligned}$$

La résolution de l'équation différentielle  $\dot{\bar{\eta}}(t) = A(t)\bar{\eta}(t) - f(t)$ , avec la condition terminale  $\bar{\eta}(T) = 0$  donne

$$\bar{\eta}(t) = e^{-\int_t^T A(s)ds} \int_t^T f(z) e^{\int_z^T A(s)ds} dz.$$

Ainsi

$$\bar{g}(t) = \bar{P}(t)\bar{\eta}(t) = e^{\int_t^T (A(s) - \|\bar{\xi}(s)\|^2)ds} \int_t^T f(z) e^{\int_z^T A(s)ds} dz.$$

Ensuite, en remplaçant  $\bar{P}(t)$  et  $\bar{g}(t)$  par leurs expressions respectives dans (4.50), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\bar{c}}(t) &= -f(t)\bar{g}(t) + \|\bar{\xi}(t)\|^2 \bar{P}(t)^{-1} \bar{g}(t)^2 \\ &= \left[ -f(t) + \frac{1}{2} \|\bar{\xi}(t)\|^2 e^{-\int_t^T A(s)ds} \int_t^T f(z) e^{\int_z^T A(s)ds} dz \right] \\ &\quad \cdot e^{\int_t^T (A(s) - \|\bar{\xi}(s)\|^2)ds} \int_t^T f(z) e^{\int_z^T A(s)ds} dz. \end{aligned}$$

Par conséquent, sachant que  $\bar{c}(T) = 0$ , on trouve aisément

$$\begin{aligned} \bar{c}(t) &= \int_t^T \left[ f(v) - \frac{1}{2} \|\bar{\xi}(v)\|^2 e^{-\int_v^T A(s)ds} \int_v^T f(z) e^{\int_z^T A(s)ds} dz \right] \\ &\quad \cdot e^{\int_v^T (A(s) - \|\bar{\xi}(s)\|^2)ds} \int_v^T f(z) e^{\int_z^T A(s)ds} dz dv. \end{aligned}$$

Définissons la region  $\Gamma_1$  du plan des  $(t, x)$  par

$$\Gamma_1 := \left\{ (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} \mid x + e^{-\int_t^T A(s)ds} \int_t^T f(z) e^{\int_z^T A(s)ds} dz < 0 \right\}$$

Dans  $\Gamma_1$ , la fonction  $V$  telle que définie par (4.54) est suffisamment lisse pour que les termes suivants

$$\begin{cases} V_t(t, x(t)) = \frac{1}{2} \dot{\bar{P}}(t)x^2 + \dot{\bar{g}}(t)x + \dot{\bar{c}}(t), \\ V_x(t, x(t)) = \bar{P}(t)x + \bar{g}(t), \\ V_{xx}(t, x(t)) = \bar{P}(t) \end{cases} \quad (4.56)$$

soient bien définies.

En les substituant dans le membre de gauche de (4.45), que nous noterons par  $(HJB)_{\Gamma_1}$ , on obtient

$$\begin{aligned}
(HJB)_{\Gamma_1} &= V_t(t, x) + V_x(t, x)[A(t)x + f(t)] \\
&\quad + \inf_{u \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} V_{xx}(t, x) u' D_j(t)' D_j(t) u + V_x(t, x) B(t) u \right\} \\
&= \left[ \frac{1}{2} \dot{P}(t) x^2 + \dot{g}(t) x + \dot{c}(t) \right] + [\bar{P}(t)x + \bar{g}(t)][A(t)x + f(t)] \\
&\quad + \inf_{u \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} \bar{P} u' D_j(t)' D_j(t) u + [\bar{P}(t)x + \bar{g}(t)] B(t) u \right\} \\
&= \left[ \frac{1}{2} \dot{P}(t) + A(t) \bar{P}(t) \right] x^2 + [\dot{g}(t) + A(t) \bar{g}(t) + f(t) \bar{P}(t)] x + [\dot{c}(t) + f(t) \bar{g}(t)] \\
&\quad + \bar{P}(t) \inf_{u \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} u' D_j(t)' D_j(t) u + [x + \bar{\eta}(t)] B(t) u \right\}.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 4.1.3 ci-dessus, avec  $h(u) = \frac{1}{2} u' D_j(t)' D_j(t) u + [x + \bar{\eta}(t)] B(t) u$ , il vient que pour  $\alpha = -[x + \bar{\eta}] > 0$ , la fonction  $h$  atteint son minimum en

$$\begin{aligned}
\bar{u}(t, x) &= \alpha \mathcal{D}^{-1} \bar{\xi}(t) \\
&= -[x + \bar{\eta}] \mathcal{D}^{-1} \bar{\xi}(t) \\
&= -\left[ x + e^{-\int_t^T A(s) ds} \int_t^T f(z) e^{\int_z^T A(s) ds} dz \right] \mathcal{D}^{-1} \bar{\xi}(t)
\end{aligned}$$

Le même lemme nous dit qu'on a

$$\begin{aligned}
h(\bar{u}(t, x)) &= h(\alpha \mathcal{D}^{-1} \bar{\xi}) \\
&= -\frac{1}{2} \alpha^2 \|\bar{\xi}\|^2 \\
&= -\frac{1}{2} [x + \bar{\eta}]^2 \|\bar{\xi}\|^2,
\end{aligned}$$

ainsi  $(HJB)_{\Gamma_1}$  devient donc

$$\begin{aligned}
(HJB)_{\Gamma_1} &= \left[ \frac{1}{2} \dot{P}(t) + A(t) \bar{P}(t) \right] x^2 + [\dot{g}(t) + A(t) \bar{g}(t) + f(t) \bar{P}(t)] x + [\dot{c}(t) + f(t) \bar{g}(t)] \\
&\quad + \bar{P}(t) \left[ -\frac{1}{2} [x + \bar{\eta}]^2 \|\bar{\xi}\|^2 \right] \\
&= \left\{ \frac{1}{2} \dot{P}(t) + [A(t) - \frac{1}{2} \|\bar{\xi}\|^2] \bar{P}(t) \right\} x^2 + \{ \dot{g}(t) + [A(t) - \|\bar{\xi}\|^2] \bar{g}(t) + f(t) \bar{P}(t) \} x \\
&\quad + \left\{ \dot{c}(t) + f(t) \bar{g}(t) - \frac{1}{2} \|\bar{\xi}\|^2 \bar{P}(t)^{-1} \bar{g}(t)^2 \right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

car  $\bar{P}$ ,  $\bar{g}$  et  $\bar{c}$  sont solutions des EDOs (4.48)-(4.50) respectivement. Ce qui montre que  $V$  est solution de (4.45) dans la région  $\Gamma_1$ .

Ensuite, on considère la région  $\Gamma_2$  définie par

$$\Gamma_2 := \left\{ (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} \mid x + e^{-\int_t^T A(s)ds} \int_t^T f(z) e^{\int_t^T A(s)ds} dz > 0 \right\}$$

Un raisonnement similaire à celui que nous venons d'effectuer conduit à

$$\begin{cases} \tilde{P}(t) = e^{2\int_t^T A(s)ds}, \\ \tilde{g}(t) = e^{\int_t^T A(s)ds} \int_t^T f(z) e^{\int_z^T A(s)ds} dz, \\ \tilde{c} = \int_t^T f(v) e^{\int_v^T A(s)ds} dv \int_t^T f(z) e^{\int_z^T A(s)ds} dz dv, \\ \tilde{\eta} = \frac{\tilde{g}(t)}{\tilde{P}(t)} = e^{-\int_t^T A(s)ds} \int_t^T f(z) e^{\int_z^T A(s)ds} dz \end{cases}$$

Dans  $\Gamma_2$ , la fonction  $V$  telle que définie par (4.54) est suffisamment lisse pour que les termes suivants

$$\begin{cases} V_t(t, x(t)) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{P}}(t) x^2 + \dot{\tilde{g}}(t) x + \dot{\tilde{c}}(t), \\ V_x(t, x(t)) = \tilde{P}(t) x + \tilde{g}(t), \\ V_{xx}(t, x(t)) = \tilde{P}(t) \end{cases}$$

soient bien définis. En les substituant dans le membre de gauche de (4.45), que nous noterons par  $(HJB)_{\Gamma_2}$ , on obtient

$$\begin{aligned} (HJB)_{\Gamma_2} &= V_t(t, x) + V_x(t, x)[A(t)x + f(t)] \\ &\quad + \inf_{u \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} V_{xx}(t, x) u' D_j(t)' D_j(t) u + V_x(t, x) B(t) u \right\} \\ &= \left[ \frac{1}{2} \dot{\tilde{P}}(t) x^2 + \dot{\tilde{g}}(t) x + \dot{\tilde{c}}(t) \right] + [\tilde{P}(t) x + \tilde{g}(t)][A(t)x + f(t)] \\ &\quad + \inf_{u \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} \tilde{P} u' D_j(t)' D_j(t) u + [\tilde{P}(t) x + \tilde{g}(t)] B(t) u \right\} \\ &= \left[ \frac{1}{2} \dot{\tilde{P}}(t) + A(t) \tilde{P}(t) \right] x^2 + [\dot{\tilde{g}}(t) + A(t) \tilde{g}(t) + f(t) \tilde{P}(t)] x + [\dot{\tilde{c}}(t) + f(t) \tilde{g}(t)] \\ &\quad + \tilde{P}(t) \inf_{u \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} u' D_j(t)' D_j(t) u + [x + \tilde{\eta}(t)] B(t) u \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 4.1.3 ci-dessus, avec  $h(u) = \frac{1}{2} u' D_j(t)' D_j(t) u + [x + \tilde{\eta}(t)] B(t) u$ , il

vient que pour  $\alpha = -[x + \bar{\eta}] < 0$ , la fonction  $h$  atteint son minimum en

$$\bar{u}(t, x) = 0$$

En remplaçant  $\bar{u}(t, x)$  par sa valeur dans  $(HJB)_{\Gamma_2}$ , et sachant que  $\tilde{P}, \tilde{g}$  et  $\tilde{c}$  sont solutions des EDOs (4.51)-(4.53) respectivement, il va de soi que  $(HJB)_{\Gamma_2} = 0$ . Ce qui montre ainsi que  $V$  est solution de (4.45) dans la région  $\Gamma_2$ .

Enfin, on considère la région

$$\Gamma_3 := \left\{ (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} \mid x + e^{-\int_t^T A(s)ds} \int_t^T f(z) e^{\int_t^T A(s)ds} dz = 0 \right\}$$

$\Gamma_3$  est la région correspondant à

$$x + \bar{\eta} = 0,$$

c-à-d,

$$x = -\bar{\eta}$$

Donc

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \frac{1}{2} \bar{P}(t) x^2 + \bar{g}(t) x + \bar{c}(t) \\ &= \frac{1}{2} \bar{P}(t) (-\bar{\eta}(t))^2 + \bar{g}(t) (-\bar{\eta}(t)) + \bar{c}(t) \\ &= -\frac{1}{2} \bar{g}(t) \bar{\eta}(t) + \bar{c}(t) \end{aligned}$$

Mais la dérivée du produit  $\bar{g}(t) \bar{\eta}(t)$  donne

$$\begin{aligned} (\bar{g}(t) \bar{\eta}(t))' &= \dot{\bar{g}}(t) \bar{\eta}(t) + \bar{g}(t) \dot{\bar{\eta}}(t) \\ &= \{ [-A(t) + \|\bar{\xi}\|^2] \bar{g}(t) - f(t) \bar{P}(t) \} \bar{\eta}(t) + \bar{g}(t) \{ A(t) \bar{\eta}(t) - f(t) \} \\ &= -2f(t) \bar{g}(t) + \|\bar{\xi}\|^2 \bar{P}(t)^{-1} \bar{g}(t)^2 \\ &= 2\dot{\bar{c}}(t) \end{aligned}$$

En intégrant les deux membres de l'égalité ci-dessus, avec  $\bar{g}(T) = \bar{\eta}(T) = \bar{c}(T) = 0$ , il vient que

$$\bar{c}(t) = \frac{1}{2} \bar{g}(t) \bar{\eta}(t)$$

De la même manière,

$$\tilde{c}(t) = \frac{1}{2} \tilde{g}(t) \tilde{\eta}(t)$$

On en déduit que

$$V(t, x) = -\frac{1}{2}\bar{g}(t)\bar{\eta}(t) + \bar{c}(t) = -\frac{1}{2}\tilde{g}(t)\tilde{\eta}(t) + \tilde{c}(t) = 0$$

Donc la fonction  $V$  s'annule sur  $\Gamma_3$ , elle est conséquent continue en tout point  $(t, x) \in \Gamma_3$ .

De plus,

$$\begin{cases} V_t(t, x(t)) = \frac{1}{2}\dot{\bar{P}}(t)x^2 + \dot{\bar{g}}(t)x + \dot{\bar{c}}(t) = \frac{1}{2}\dot{\tilde{P}}(t)x^2 + \dot{\tilde{g}}(t)x + \dot{\tilde{c}}(t) = 0, \\ V_x(t, x(t)) = \bar{P}(t)x + \bar{g}(t) = \tilde{P}(t)x + \tilde{g}(t) = 0. \end{cases} \quad (4.57)$$

$V$  est donc de classe  $C^1$  sur  $\Gamma_3$ . Cependant  $V_{xx}$  n'est pas définie sur  $\Gamma_3$ ,

car  $\bar{P}(t) \neq \tilde{P}(t)$ . Ce qui signifie que  $V \notin C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ . Nous faisons donc recours à la notion de solution de viscosité. On peut montrer que

$$\begin{cases} D_{t,x}^{1,2,+}V(t, x) = \{0\} \times \{0\} \times [\tilde{P}(t), \infty), \\ D_{t,x}^{1,2,-}V(t, x) = \{0\} \times \{0\} \times (-\infty, \bar{P}(t)]. \end{cases}$$

Définissons l'hamiltonien associé à l'équation HJB (4.45) par

$$G(t, x, u, p, P) = p[A(t)x + B(t)u + f(t)] + \frac{1}{2}Pu'D(t)'D(t)u$$

Pour tout  $(q, p, P) \in D_{t,x}^{1,2,+}V(t, x)$ , avec  $(t, x) \in \Gamma_3$ , on a

$$q + \inf_{u \geq 0} G(t, x, u, p, P) = \inf_{u \geq 0} \left\{ \frac{1}{2}Pu'D(t)'D(t)u \right\} \geq \left\{ \frac{1}{2}\tilde{P}(t)u'D(t)'D(t)u \right\} = 0$$

Donc  $V$  est une *sous-solution de viscosité* de l'équation HJB (4.45).

D'autre part, pour tout  $(q, p, P) \in D_{t,x}^{1,2,-}V(t, x)$ , avec  $(t, x) \in \Gamma_3$ , on a

$$q + \inf_{u \geq 0} G(t, x, u, p, P) = \inf_{u \geq 0} \left\{ \frac{1}{2}Pu'D(t)'D(t)u \right\} \leq \left\{ \frac{1}{2}\bar{P}(t)u'D(t)'D(t)u \right\} = 0$$

Donc  $V$  est une *sursolution de viscosité* de l'équation HJB (4.45).

Enfin, il est évident que  $V(T, x) = \frac{1}{2}x^2$ .  $V$  est donc une *solution de viscosité* de l'équation HJB (4.45). De plus, pour tout  $(t, x) \in \Gamma_3$  tel que

$$(q^*(t, x), p^*(t, x), P^*(t, x), \bar{u}(t, x)) := (0, 0, \tilde{P}(t), 0) \in D_{t,x}^{1,2,+}V(t, x) \times \mathcal{U}[s, T],$$

alors

$$q^*(t, x) + G(t, x, \bar{u}(t, x), p^*(t, x), P^*(t, x)) = 0.$$

Il s'ensuit par le théorème de vérification (Théorème 3.3.8), que  $\bar{u}(t, x)$  définie en (4.55) est le contrôle optimal, ce qui achève ainsi la démonstration.  $\square$

Revenons à notre problème moyenne-variance. Rappelons que nous désirons minimiser la fonction de coût

$$\mathbb{E}\left[\left(x(T) + \frac{\lambda_T}{2}\right)^2\right]$$

Ce qui est équivalent à minimiser

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left(x(T) + \frac{\lambda_T}{2}\right)^2\right].$$

En posant

$$X(t) = x(t) + \frac{\lambda_T}{2},$$

notre problème revient donc à minimiser

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X(T)^2\right],$$

sous

$$\begin{cases} dX(t) = \{A(t)X(t) + B(t)u(t) + f(t)\}dt + \sum_{j=1}^m D_j(t)u(t)dW^j(t), \\ X(0) = x_0 + \frac{\lambda_T}{2}, \end{cases} \quad (4.58)$$

où

$$\begin{cases} A(t) = r(t), & B(t) = (b_1(t) - r(t), \dots, b_m(t) - r(t)), \\ f(t) = -\frac{\lambda_T}{2}r(t), & D_j(t) = (\sigma_{1j}(t), \dots, \sigma_{mj}(t)). \end{cases} \quad (4.59)$$

En se basant sur (4.46) et (4.47), posons

$$\bar{\pi} := \arg \min_{\pi(t) \in [0, \infty)^m} \|\sigma(t)^{-1}\pi(t) + \sigma(t)^{-1}(b(t) - r(t)\mathbf{1})\|^2, \quad (4.60)$$

et

$$\bar{\theta} := \sigma(t)^{-1}\bar{\pi}(t) + \sigma(t)^{-1}(b(t) - r(t)\mathbf{1}) \quad (4.61)$$

( $\mathbf{1}$  est la matrice colonne à  $m$  lignes dont tous les coefficients sont égaux à 1.)



**Stratégie optimale :** D'après la proposition 4.3.1, le contrôle optimal du problème moyenne-variance avec interdiction de vente à découvert est

$$\begin{aligned}\bar{u}(t, X) &= \begin{cases} -(\sigma(t)')^{-1}\bar{\theta}(t)\left[X - \frac{\lambda_T}{2}(1 - e^{-\int_t^T r(s)ds})\right] & \text{si } X - \frac{\lambda_T}{2}(1 - e^{-\int_t^T r(s)ds}) \leq 0 \\ 0 & \text{si } X - \frac{\lambda_T}{2}(1 - e^{-\int_t^T r(s)ds}) > 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} -(\sigma(t)\sigma(t)')^{-1}[\bar{\pi}(t) + (b(t) - r(t)\mathbf{1})]\left[x + \frac{\lambda_T}{2}e^{-\int_t^T r(s)ds}\right] & \text{si } x + \frac{\lambda_T}{2}e^{-\int_t^T r(s)ds} \leq 0 \\ 0 & \text{si } x + \frac{\lambda_T}{2}e^{-\int_t^T r(s)ds} > 0. \end{cases}\end{aligned}$$

**Frontière efficiente :** Nous allons spécifier la relation entre  $\text{Var}(X(T))$  et  $\mathbb{E}[X(T)]$ .

Notons que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(T)^2] &= \mathbb{E}\left[\left(x(T) + \frac{\lambda_T}{2}\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[x(T)^2 + \lambda_T x(T) + \left(\frac{\lambda_T}{2}\right)^2\right]\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}[X(T)^2] - \lambda_T d = \mathbb{E}\left[x(T)^2 + \lambda_T(x(T) - d)\right] + \frac{\lambda_T^2}{4},$$

et en soustrayant  $d^2$  dans les deux membres de l'égalité ci dessus, on a

$$\mathbb{E}[X(T)^2] - \left(d + \frac{\lambda_T}{2}\right)^2 = \mathbb{E}\left\{[x(T) - d]^2 + \lambda_T[x(T) - d]\right\}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
& \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}[0,T]} \frac{1}{2} \mathbb{E} \{ [x(T) - d]^2 + \lambda_T [x(T) - d] \} \\
&= \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}[0,T]} \frac{1}{2} \mathbb{E} [X(T)^2] - \frac{1}{2} (d + \frac{\lambda_T}{2})^2 \\
&= V(0, X(0)) - \frac{1}{2} (d + \frac{\lambda_T}{2})^2 \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2} \bar{P}(0) X_0^2 + \bar{g}(0) X_0 + \bar{c}(0) - \frac{1}{2} (d + \frac{\lambda_T}{2})^2 & \text{si } X_0 - \frac{\lambda_T}{2} (1 - e^{-\int_0^T r(s) ds}) \leq 0 \\ \frac{1}{2} \tilde{P}(0) X_0^2 + \tilde{g}(0) X_0 + \tilde{c}(0) - \frac{1}{2} (d + \frac{\lambda_T}{2})^2 & \text{si } X_0 - \frac{\lambda_T}{2} (1 - e^{-\int_0^T r(s) ds}) > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2} \bar{P}(0) [x_0 + \frac{\lambda_T}{2}]^2 + \bar{g}(0) [x_0 + \frac{\lambda_T}{2}] + \bar{c}(0) - \frac{1}{2} (d + \frac{\lambda_T}{2})^2 & \text{si } x_0 + \frac{\lambda_T}{2} e^{-\int_0^T r(s) ds} \leq 0 \\ \frac{1}{2} \tilde{P}(0) [x_0 + \frac{\lambda_T}{2}]^2 + \tilde{g}(0) [x_0 + \frac{\lambda_T}{2}] + \tilde{c}(0) - \frac{1}{2} (d + \frac{\lambda_T}{2})^2 & \text{si } x_0 + \frac{\lambda_T}{2} e^{-\int_0^T r(s) ds} > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

En remplaçant  $\bar{P}(0), \bar{g}(0), \bar{c}(0), \tilde{P}(0), \tilde{g}(0), \tilde{c}(0)$  par leurs valeurs repectives, on en déduit que sous la stratégie efficiente (4.62), le coût optimal est

$$\begin{aligned}
& \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}[0,T]} \mathbb{E} \{ [x(T) - d]^2 + \lambda_T [x(T) - d] \} \tag{4.62} \\
&= \begin{cases} e^{-\int_0^T \|\tilde{\theta}(s)\|^2 ds} \left[ x_0 e^{\int_0^T r(s) ds} + \frac{\lambda_T}{2} \right]^2 - (d + \frac{\lambda_T}{2})^2 & \text{si } x_0 + \frac{\lambda_T}{2} e^{-\int_0^T r(s) ds} \leq 0 \\ \left[ x_0 e^{\int_0^T r(s) ds} + \frac{\lambda_T}{2} \right]^2 - (d + \frac{\lambda_T}{2})^2 & \text{si } x_0 + \frac{\lambda_T}{2} e^{-\int_0^T r(s) ds} > 0 \end{cases} \tag{4.63}
\end{aligned}$$

Pour obtenir la variance minimale, l'on doit par théorème de dualité de Lagrange (Luenberger, 1968), maximiser la valeur de (4.62) sur l'ensemble des  $\lambda_T \in \mathbb{R}$ .

(4.62) atteint sa valeur maximale

$$\begin{aligned}
\text{Var } x(T) &= \frac{(d - x_0 e^{\int_0^T r(s) ds})^2}{e^{\int_0^T \|\tilde{\theta}(s)\|^2 ds} - 1} \\
&= \frac{(\mathbb{E}(x(T)) - x_0 e^{\int_0^T r(s) ds})^2}{e^{\int_0^T \|\tilde{\theta}(s)\|^2 ds} - 1}.
\end{aligned}$$

en

$$\lambda_T^* = \frac{2(d - x_0 e^{\int_0^T (r(s) - \|\hat{\theta}(s)\|^2) ds})}{e^{-\int_0^T \|\hat{\theta}(s)\|^2 ds} - 1}.$$

## CONCLUSION

Nous venons d'aborder dans le cadre de notre travail la notion d'optimisation stochastique en temps continu. Après avoir formulé quelques exemples de problèmes d'optimisation avec et sans contraintes, nous en avons donné deux approches de résolution qui, en fait, ne sont que des conditions nécessaires d'optimalité. La première, le principe du maximum stochastique, consiste essentiellement à maximiser la fonction que nous avons notée  $\mathcal{H}$ . Cette méthode fait recours à la notion d'équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSRs) dont la manipulation n'est pas toujours aisée. La deuxième, la programmation dynamique, se résume à la résolution de l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman (HJB). La complexité survient lorsque cette dernière n'admet pas de solutions régulières. Tout l'intérêt de ces techniques provient du fait que dans les deux cas, nous avons pu énoncer des conditions suffisantes d'optimalité. Alors que l'on se demanderait laquelle des deux techniques est la plus abordable, il convient de souligner qu'il existe dans la littérature d'autres approches de résolution telle que celle par les équations de Riccati.

## BIBLIOGRAPHIE

- Lim, A.E.B., et Zhou, X.Y. 2005. « Mean-variance portofolio selection with random parameters ». *Mathematics of Operations Research.* , vol. 27, Iss. 1, p. 101-121.
- Watier, F. 2002. « Optimisation stochastique dans le cadre de le gestion de portefeuilles ». Thèse de doctorat, Sherbrooke, Université de Sherbrooke.
- Haussmann, U.G. 1981 .« Some examples of optimal stochastic controls or : The stochastic maximum principle at work ». *SIAM Review.* , vol. 23, no 3,p. 292 - 307.
- Hu, Y. et Zhou, X.Y. 2005.« Constrained Stochastic LQ Control with Random Coefficients, and Application to Portfolio Selection ». *SIAM Journal on Control and Optimization.* , vol. 44, no 2,p. 444 - 466.
- Li, X., Zhou, X.Y. et Lim, A.E.B. 2002.« Dynamic mean-variance portfolio selection with no-shorting constraints ». *Journal of Finance.* , vol. 40, no 5, p. 1540-1555.
- EL Karoui, N et Mazliak, L. 1997. *Backward stochastic differential equations.*« Pitman Research Notes in Mathematics Series », vol. 364, Essex : Longman.
- Yong, J. et Zhou, X.Y. 1999. *Stochastic Controls : Hamiltonian Systems and HJB Equations.* Coll.« Applications of Mathematics », vol. 43, New York : Springer.
- Yosida, K. 1980. *Functional Analysis.* 6e éd., Berlin : Springer-Verlag.